Ответы и решения

1. Ответ: $\left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$

Решение.

Обозначение: $u = 2f(x)$. Тогда уравнение $f(u) = 117 \to u^2 + 2u - 3 = 117 \to u^2 + 2u - 120 = 0$ имеет решения $u_1 = -12$ и $u_2 = 10$.

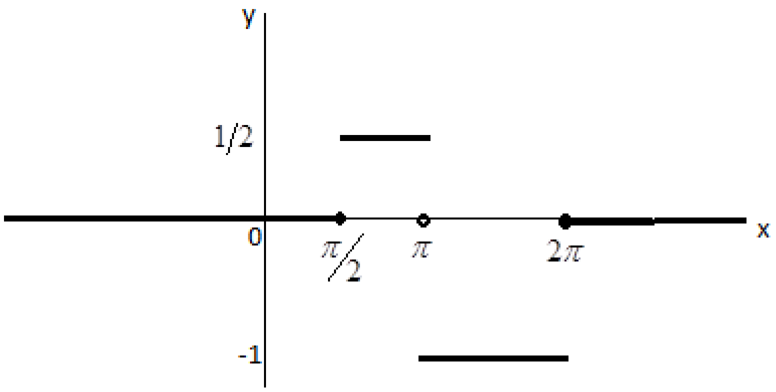
Случай 1. $2f(x) = 10 \to f(x) = 5 \to x^2 + 2x - 3 = 5 \to x^2 + 2x - 8 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$.

Случай 2. $2f(x) = -12 \to f(x) = -6 \to x^2 + 2x - 3 = -6 \to x^2 + 2x + 3 = 0$ корней не имеет.

2. Ответ: 1) $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z, k \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$ 2) $x = \frac{7\pi}{4}$

Решение.

На рис. изображен график функции в правой части уравнения:



Случай 1. $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ x \in \left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right] \cup (2\pi; +\infty) \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ k \in Z, \ k \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \end{cases}$.

Случай 2. $\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right] \to 2x \in (\pi; 2\pi] \end{cases} \to$ решений нет.

Случай 3. $\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ x \in (\pi; 2\pi] \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ k = 2 \end{cases} \to x = \dfrac{7\pi}{4}$

3. Ответ: $a = 1/4,\ b = 1/2,\ c = -3/4$

Решение.

$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 2(n-1) = 2n+1$, $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{3+2n+1}{2} \cdot n = (n+2)n$,

$f(a_n) = a(2n+1)^2 + b(2n+1) + c = 4an^2 + (4a+2b)n + a + b + c$.

$f(a_n) = S_n$ для всех n если коэффициенты многочленов равны:

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4a + 2b = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 1/2 \\ c = -3/4 \end{cases} .$$

4. Ответ: $n = 6, 15, 16, 17$

Решение.

Вычисление дискриминанта: $D/4 = (n+15)^2 - 15(n-6)(20-n) = (4n-45)^2$.

Решение уравнения: $x_n^1 = \dfrac{5n-30}{15}$, $x_n^2 = \dfrac{60-3n}{15}$.

Расстояние между корнями: $d = \left|x_n^1 - x_n^2\right| = \dfrac{|8n-90|}{15}$.

Числа n нужно выбирать среди тех, для которых

$$2 \le d < 4 \to 2 \le \frac{|8n-90|}{15} < 4 \to 15 \le |4n-45| < 30 \to$$

$$\to \begin{cases} -30 < 4n - 45 < 30 \\ \left[\begin{array}{l} 4n - 45 \ge 15 \\ 4n - 45 \le -15 \end{array} \right. \end{cases} \to n \in (3,75; 7,5] \cup [15; 18,75) .$$

Искомые n находятся среди чисел $4, 5, 6, 7, 15, 16, 17, 18$.

При $n = 4$ отрезок решений неравенства $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{5}\right]$ содержит четыре целых решения.

При $n = 5$ отрезок решений неравенства $\left[-\dfrac{1}{3}; 3\right]$ содержит четыре целых решения.

При $n = 6$ отрезок решений неравенства $\left[0; \dfrac{14}{5}\right]$ содержит три целых решения.

При $n = 7$ отрезок решений неравенства $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{13}{5}\right]$ содержит два целых решения.

При $n = 15$ отрезок решений неравенства $[1; 3]$ содержит три целых решения.

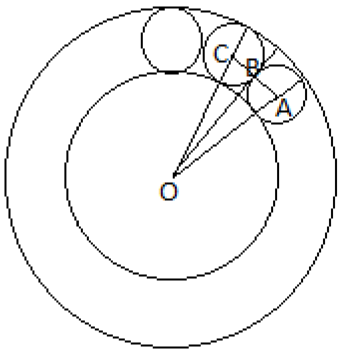
При $n = 16$ отрезок решений неравенства $\left[\dfrac{4}{5}; \dfrac{10}{3}\right]$ содержит три целых решения.

При $n=17$ отрезок решений неравенства $\left[\frac{3}{5};\frac{11}{3}\right]$ содержит три целых решения.

При $n=18$ отрезок решений неравенства $\left[\frac{2}{5};4\right]$ содержит четыре целых решения.

5. Ответ: $R=\dfrac{\rho\left(1+\sin\left(\pi/n\right)\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$

Решение.



$AC=2\rho,\ AB=\rho,\ OA=r+\rho,\ \measuredangle AOB=\dfrac{\pi}{n},\ \ R=r+2\rho$

$$(R-\rho)\sin\frac{\pi}{n}=\rho\to R=\frac{\rho\left(1+\sin\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\quad (1)$$

$$\left(r+\rho\right)\sin\left(\pi/n\right)=\rho\to r=\frac{\rho\left(1-\sin\left(\pi/n\right)\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}\quad (2)$$

$$R=\frac{1+\sin\left(\pi/n\right)}{1-\sin\left(\pi/n\right)}\cdot r\quad (3)$$

$$r:R=\frac{1-\sin\left(\pi/n\right)}{1+\sin\left(\pi/n\right)}\quad (4)$$

2.21. Критерии определения победителей и призеров Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года, Математика

Оргкомитет Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» установил следующие принципы оценивания работ заключительного тура и определения победителей и призеров олимпиады 2015-2016 учебного года.

1. Максимальная оценка за каждую задачу – 2 балла независимо от уровня сложности задачи.
2. Каждая задача в зависимости от полноты решения оценивалась оценкой: 0 баллов, 0,5 балла, 1 балл, 1,5 балла или 2 балла.
3. Оценка олимпиадной работы равна сумме оценок за все задачи.
4. Если сумма оценок за задачи оказывается «полуцелой» (5.5, 6.5 и т.д.), оценка округляется до целого значения с избытком или недостатком по усмотрению проверяющего работу члена жюри.
5. Победителями и призерами олимпиады считаются участники заключительного тура, получившие следующие оценки

Класс	Оценки победителей и призеров		
	Победитель	Призер 2 степени	Призер 3 степени
7	10-9	8	7
8	10	9	нет
9	10	9	8
10	10	9	нет
11	10-12	9	8