2.10. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

1. Координаты вершин многоугольника на плоскости – ненулевые решения системы $\begin{cases} x^3 = 5x + 2y \\ y^3 = 2x + 5y \end{cases}$. Найти его площадь.

2. Координаты точки M в пространстве являются последовательными членами арифметической прогрессии с суммой 36, а точки N - последовательными членами геометрической прогрессии. Координаты вектора $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ равны $(9;18;35)$, где O – начало координат. Найти координаты точек M и N.

3. Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \sin\frac{ax}{5} + \cos\frac{7x}{a}$, где a – наибольшее значение выражения $\frac{16x^2 + \left(x^2 - 1\right)^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ на числовой оси.

4. Для каждого a решить уравнение $2x^3 - (a-4)x^2 - (a^2 + 2a)x - 2a^2 = 0$. При каких a уравнение имеет ровно два решения.

5. Сумма квадратов длин сторон треугольника ABC равна 36, а его площадь $5\sqrt{3}$.
Точки P, Q и R являются вершинами равнобедренных треугольников с углом 120^0,
построенных на сторонах треугольника ABC, как на основаниях (внешние). Найти длины сторон треугольника PQR.