## 2.13. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

1. Петя и его младший брат Вова решили измерить зимой расстояние от дома до остановки автобуса напрямик через снежное поле. Они надели валенки одинакового размера, длина шага в которых у Пети 75 см., а у Вовы – 55 см. На снегу было оставлено 501 одинаковых следов от валенок, причем каждый сделал целое число шагов. Найти расстояние от дома до остановки (следы на снегу полагайте точками).

2. Найти целые числа $x$ и $y$, для которых $2xy = (x+5)(y+5)$ и величина $x+y$ принимает наибольшее возможное значение.

3. Найти числа $a$ и $b$, при которых многочлен $P(x) = ax^4 + 3x^3 + b$ делится на $(x-2)^2$ без остатка.

4. При каких значениях $a$ сумма квадратов действительных корней ( с учетом кратности) уравнения $8x^2 + 8(a-1)x + 4 - a = 0$ минимально возможная?

5. На сторонах треугольника $ABC$ с длинами сторон 2, 3 и 4 построены (внешние) квадраты $ABB_1A_1$, $BCC_2B_2$, $CAA_3C_3$. Найти сумму квадратов длин сторон шестиугольника $A_1B_1B_2C_2C_3A_3$ .

### Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 165 м.

Решение

$m$ - число шагов Пети, $n$ - число шагов Вовы

$0,75m = 0,55n = L -$ длина пути

$k$ - номер шага Пети , приводящего к совпадению следа,

$i$ - номер шага Вовы , приводящего к совпадению следа,

$$0,75k = 0,55i \to 15k = 11i \to \begin{cases} k = 11t \\ i = 15t \end{cases}, t = 0,1,\dots T$$

Общее количество следов: $(m+1)+(n+1)-(T+1) = 15T + 11T - T + 1 = 25t + 1 = 501 \to T = 20$

$m = 11 \cdot T = 220 \to L = 0,75 \cdot 220 = 165$

Задача 2 Ответ: $x = 6,\ y = 55$ или $x = 55,\ y = 6$

Решение

$y(x-5) = 5(x+5) \to y = 5 + \dfrac{50}{x-5} \to x - 5 = \pm1; \pm2; \pm5; \pm10; \pm25; \pm50$

$y - 5 = \pm50; \pm25; \pm10; \pm5; \pm2; \pm1 \to x + y - 10 = \pm51; \pm27; \pm15;$

Максимальное значение $x+y$ равно 61 и достигается при $x = 6,\ y = 55$ или $x = 55,\ y = 6$

Задача 3 Ответ: $a = -\dfrac{9}{8},\ b = -6$

Решение

При делении многочлена $P(x) = ax^4 + 3x^3 + b$ на $x - 2$ имеем остаток $16a + b + 24 = 0$. Тогда

$P(x) = (x-2)\left(ax^3 + (2a+3)x^2 + (4a+6)x + (8a+12)\right) = (x-2)P_1(x)$

При делении многочлена $P_1(x)$ на $x - 2$ имеем остаток $32a + 36 = 0 \to a = -\frac{9}{8} \to b = -6$.

Задача 4 Ответ: $a = 2$

Решение

Условие существования корней:

$\frac{D}{4} = 16(a-1)^2 + 8(a-4) \ge 0 \to 2a^2 - 3a - 2 \ge 0 \to a \in (-\infty; -0,5] \cup [2; +\infty)$.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-1)^2 - \frac{4-a}{4} = a^2 - \frac{7a}{4}$

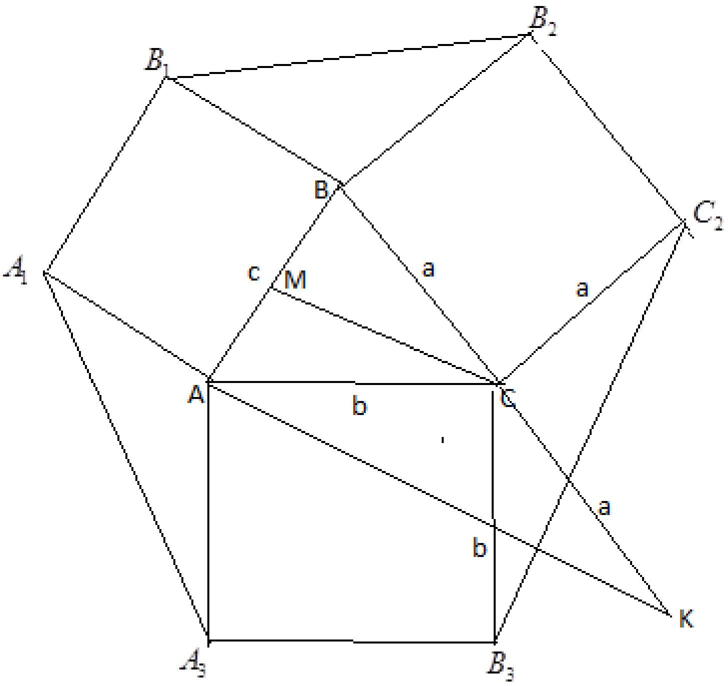
Нужно найти минимум этого квадратного трехчлена на множестве $(-\infty; -0,5] \cup [2; +\infty)$.

Абсцисса его вершины $a = \frac{7}{8}$ находится ближе к 2, чем к $-0,5$, поскольку $2 - \frac{7}{8} = \frac{9}{8} < \frac{7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$.

Поэтому минимально возможное значение суммы квадратов корней уравнения достигается при $a = 2$.

Задача 5 Ответ: 116

Решение




Дополнительное построение: $BC = CK = a$, $M$ – середина стороны $AB$.

$\angle ACK = \angle C_2CB_3 = \angle KCB_3 = 180^0 - \angle BCA$

$\triangle ACK = \triangle B_3CC_2 \to C_2B_3 = AK = 2CM$

$CM^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \to C_2B_3^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$

Аналогично,

$B_1B_2^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \quad A_1A_3^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

$A_1A_2^2 = c^2, \; B_2C_2^2 = a^2, \; A_3B_3^2 = b^2$

Объединяя. приходим к тому, что сумма $\sigma^2$ квадратов сторон шестиугольника равна $4\left(a^2+b^2+c^2\right)$ .В условиях варианта 1 $a=2,\ b=3,\ c=4$ , поэтому $\sigma^2=4(4+9+16)=116$