2.14. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

1. Саша ехал в автобусе по улице и увидел через окно своего друга Колю, идущего по другой стороне улицы в противоположном направлении. Через две минуты автобус остановился на остановке. Саша быстро вышел из автобуса, перебежал улицу и побежал догонять Колю. Через сколько минут он догонит Колю, если он бежит в три раза быстрее, чем идет Коля и в пять раз медленнее, чем едет автобус? Время выхода из автобуса и перехода улицы не учитывать.

2.Доказать формулу «сложного корня» $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ и с ее помощью вычислить величину $\left(\frac{\sqrt{13 + \sqrt{48}} - 1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} \right)^2$

3. $\{a_k\}$ – арифметическая прогрессия, S_n – сумма первых n ее членов.

Известно, что $S_m : S_n = m(m+2) : n(n+2)$ при любых целых, положительных m и n . Найти отношение $a_{2015} : a_{2014}$.

4. Найти целые x и y , для которых $x^4 - 3x^2 y + 2y^2 = 35$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2 . Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: через 16 мин.

Решение

v_A, v_k, v_c – скорости автобуса, Коли и Саши соответственно, T – искомое время.

Расстояние между Колей и Сашей в момент остановки автобуса: $2(v_A + v_k)$. Скорость их сближения: $v_C - v_k$, $v_C = 3v_k, v_A = 5v_C = 15v_k$ – условия задачи. $T = \frac{2(v_A + v_k)}{v_C - v_k} = \frac{2(15v_k + v_k)}{3v_k - v_k} = 16$

Задача 2 Ответ: 2

Решение

Основано на равенстве: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ (доказывается возведением в квадрат).

1. $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{169 - 48}}{2}} + \sqrt{\frac{13 - \sqrt{169 - 48}}{2}} = \sqrt{12} + 1$
2. $\sqrt{7 - \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 - 24}}{2}} - \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49 - 24}}{2}} = \sqrt{6} - 1$
3. $\frac{\sqrt{13 + \sqrt{48}} - 1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$.

Задача 3 . Ответ; $4031:4029$
Решение.

$$S_2 = 2a_1 + d,\ \ S_1 = a_1 \to S_2 : S_1 = \frac{2a_1 + d}{a_1} = \frac{8}{3} \to \frac{d}{a_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_{2015}}{a_{2014}} = \frac{a_1 + d \cdot 2014}{a_1 + d \cdot 2013} = \frac{3 + 2 \cdot 2014}{3 + 2 \cdot 2013} = \frac{4031}{4029}$$

Задача 4. Ответ: $\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Решение

Разложим левую часть на множители: $\left(x^2 - y\right)\left(x^2 - 2y\right) = 35$. В целых числах это возможно в следующих восьми случаях:

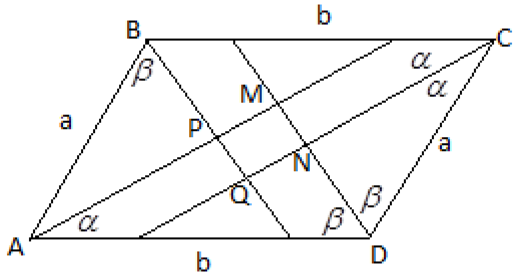
$1.\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x^2 - 2y = 35 \end{cases}$ $2.\begin{cases} x^2 - y = -1 \\ x^2 - 2y = -35 \end{cases}$ $3.\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 - 2y = 7 \end{cases}$ $4.\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ x^2 - 2y = -7 \end{cases}$ $5.\begin{cases} x^2 - y = 7 \\ x^2 - 2y = 5 \end{cases}$

$6.\begin{cases} x^2 - y = -7 \\ x^2 - 2y = -5 \end{cases}$ $7.\begin{cases} x^2 - y = 35 \\ x^2 - 2y = 1 \end{cases}$ $8.\begin{cases} x^2 - y = -35 \\ x^2 - 2y = -1 \end{cases}$

Целые решения $\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = 2 \end{cases}$ имеет только система 5. , остальные системы целых решений не имеют.

Задача 5. Ответ: $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} = 1:12$

Решение:



На рис. изображен параллелограмм $ABCD$ с острым углом 2α и четырехугольник $MNPQ$, образованный биссектрисами внутренних углов. Поскольку $\alpha + \beta = 90^0$ четырехугольник $MNPQ$ - прямоугольник. Вычислим его стороны.

$$MN = DM - DN = b\sin\alpha - a\sin\alpha = (b-a)\sin\alpha$$
$$QN = CQ - CN = b\cos\alpha - a\cos\alpha = (b-a)\cos\alpha$$
.

Тогда

$$S_{MNPQ} = MN \cdot QN = (b-a)^2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{(b-a)^2}{2}\sin 2\alpha$$

$$S_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin 2\alpha$$
.

$$S_{MNPQ} : S_{ABCD} = \frac{(b-a)^2}{2ab}$$

В варианте $a = 2,\ b = 3\ \ S_{MNPQ} : S_{ABCD} = 1:12$