2.16. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс

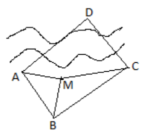
1. Петя родился в двадцатом веке. В 2014 году его возраст был в три раза большим, чем сумма цифр года его рождения. В каком году родился Петя?

2. Найти все целые n, при которых выражение $n^2 - 2n - 3$ делится на 13 без остатка.

3. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a, если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2.

4. Среди обыкновенных дробей вида $\frac{p}{q}$, для которых $p + q = 55$, найти дробь наименее удаленную на числовой прямой от числа $\frac{3}{4}$.

5. Перед Петей стоит вполне практическая задача. На рис. указано расположение точек A, B, C на одной стороне реки, точки D на другой и точки M, в которой находится Петя. Расстояние от точки M до точек A, B, C Петя измерил: $MA = 20$, $MB = 30$, $MC = 40$. Пете и вам нужно вычислить расстояние от точки M до точки D, если известно, что $ABCD$ – прямоугольник, а плавать Петя не умеет.



Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1948

Решение

$19xy$ – год рождения Пети,

$$2014 - 1900 - 10x - y = 3(1 + 9 + x + y) \to 84 = 13x + 4y \to \begin{cases} x = 4t \\ y = 21 - 13t, \end{cases} t \in Z$$ – общее решение. С учетом цифры $t = 1 \to x = 4,\ y = 8$, т.е. год рождения Пети 1948.

Задача 2 Ответ: 1) $n = 13k + 3,\ k \in Z$ 2) $n = 13k - 1,\ k \in Z$

Решение

Выражение $A = n^2 - 2n - 3 = (n+1)(n-3)$ делится на 13, если один сомножителей $n + 1$ или $n - 3$ делится на 13:

$$\left[\begin{array}{l} n + 1 = 13k \\ n - 3 = 13k,\ k \in Z \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} n = 13k - 1 \\ n = 13k + 3,\ k \in Z \end{array}\right. .$$

Задача 3 Ответ: $a = 1728$

Решение

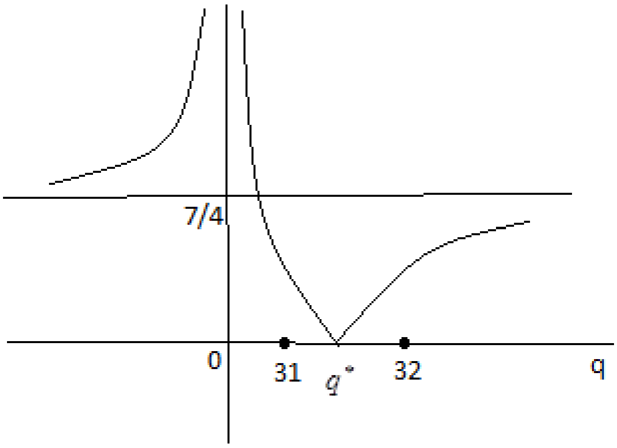
По условию $a = 2^{2m} \cdot 3^m$. Общее число его делителей, включая единицу, равно $(2m+1)(m+1)$. Общее число делителей $a^2 = 2^{4m} \cdot 3^{2m}$ равно $(4m+1)(2m+1)$. Их разность $(4m+1)(2m+1) - (2m+1)(m+1) = 3m(2m+1)$ по условию равна 63: $2m^2 + m - 21 = 0$.

Последнее уравнение имеет только одно целое решение $m = 3$. Тогда число $a = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$.

Задача 4 Ответ: $\frac{24}{31}$

Решение. Необходимо найти целое q, для которого величина $\Delta = \left|\frac{3}{4} - \frac{55-q}{q}\right| = \left|\frac{7q-220}{4q}\right|$ принимает наименьшее значение.

На рис. изображен график зависимости Δ от q:



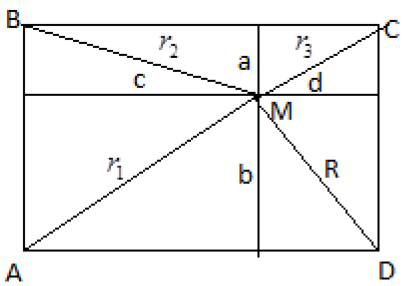
$q^* = \frac{220}{7} \approx 31,4$ – ноль функции Δ. $q_1 = 31,\quad q_2 = 32$ - ближайшие к q^* целые числа.

$\Delta(q_1) = \frac{3}{128} < \Delta(q_2) = \frac{4}{128}$. Искомая дробь $\frac{24}{31}$ соответствует $q = 31$.

Задача 5 Ответ: $10\sqrt{11}$

Решение

Пусть a, b – расстояния от точки M до сторон BC и CD, а c, d – расстояния от точки M до сторон AB и CD.



Обозначим через r_1, r_2, r_3 и R - расстояния точки M до вершин A, B, C и D. Тогда

$c^2 + b^2 = r_1^2,\ a^2 + c^2 = r_2^2,\ a^2 + d^2 = r_3^2,\ d^2 + b^2 = R^2$. Заметим, что $r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 + R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Откуда $R^2 = r_1^2 + r_3^2 - r_2^2$. В варианте $r_1 = 20,\ r_2 = 30,\ r_3 = 30$, поэтому $R^2 = 20^2 + 40^2 - 30^2 = 1100 \to R = 10\sqrt{11}$