2.10. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

1. Координаты вершин многоугольника на плоскости – ненулевые решения системы $\begin{cases} x^3 = 5x + 2y \\ y^3 = 2x + 5y \end{cases}$

. Найти его площадь.

2. Координаты точки M в пространстве являются последовательными членами арифметической прогрессии с суммой 36, а точки N - последовательными членами геометрической прогрессии. Координаты вектора $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ равны $(9;18;35)$, где O – начало координат. Найти координаты точек M и N.

3. Найти наименьший положительный период функции $f(x) = \sin\frac{ax}{5} + \cos\frac{7x}{a}$, где a – наибольшее значение выражения $\frac{16x^2 + \left(x^2 - 1\right)^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ на числовой оси.

4. Для каждого a решить уравнение $2x^3 - (a-4)x^2 - (a^2 + 2a)x - 2a^2 = 0$. При каких a уравнение имеет ровно два решения.

5. Сумма квадратов длин сторон треугольника ABC равна 36, а его площадь $5\sqrt{3}$.

Точки P, Q и R являются вершинами равнобедренных треугольников с углом 120^0, построенных на сторонах треугольника ABC, как на основаниях (внешние). Найти длины сторон треугольника PQR.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $S = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{7}$

Решение

По условию $x \neq 0,\ y \neq 0$. Разделим левые и правые части уравнений: $\frac{y^3}{x^3} = \frac{2x + 5y}{5x + 2y} = \frac{2 + 5y/x}{5 + 2y/x}$.

Замена: $t = \frac{y}{x} \to t^3 = \frac{5t + 2}{2t + 5} \to 2t^4 + 5t^3 - 5t - 2 = 0,\ t \neq -\frac{5}{2}$.

Разложим многочлен на множители: $(t-1)(t+1)(2t^2 + 5t + 2) = (t-1)(t+1)(2t+1)(t+2) = 0$.

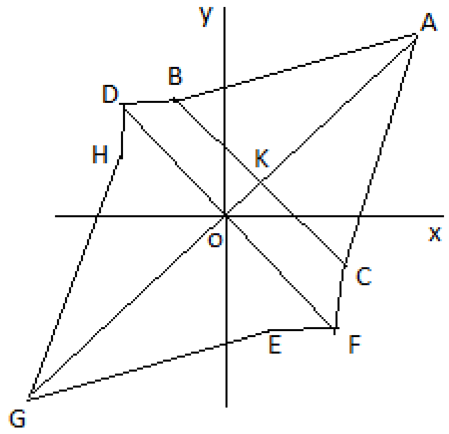
Случай 1. $t = 1 \to \begin{cases} x^3 = 5x + 2y \\ y = x,\ x \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 7 \\ y = x \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ y = x \end{cases}.(A, G)$

Случай 2. $t = -1 \to \begin{cases} x^3 = 5x + 2y \\ y = -x,\ x \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = -x \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = -x \end{cases}.(D, F)$

Случай 3. $t = -2 \to \begin{cases} x^3 = 5x + 2y \\ y = -2x,\ x \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -2x \end{cases} \to \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -2x \end{cases}.(B, E)$

Случай 4. $t=-\frac{1}{2}\to\begin{cases} y^3=2x+5y \\ x=-2y,\ \ y\neq 0\end{cases}\to\begin{cases} y^2=1 \\ x=-2y\end{cases}\to\begin{cases} x=\mp 2 \\ y=\pm 1\end{cases}$. (C,H)

На рис. изображен многоугольник с такими вершинами:



Фигура симметрична относительно прямых $y=x$ и $y=-x$. Многоугольник $BCFD$ – трапеция, ABC – равнобедренный треугольник, $AB=AC$. Координаты точки $A(\sqrt{7};\sqrt{7})\to AO=\sqrt{14}$, Координаты точек $B(-1;2)$ и $C(2;-1)$, уравнение прямой BC: $x+y=1$, длина $BC=3\sqrt{2}$. Высота трапеции $OK=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Длина основания $DF=2\sqrt{6}$. Площадь трапеции $S_{BCFD}=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

Высота треугольника ABC равна $AK=AO-OK=\sqrt{14}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$.

Площадь $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{3(2\sqrt{7}-1)}{2}$. Половина площади многоугольника равна:

$$\frac{S}{2}=S_{ABC}+S_{BCFD}=\frac{3}{2}(2\sqrt{7}-1)+\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\to S=6\sqrt{7}+2\sqrt{3}$$

Задача 2 Ответ: 1) $M(7;12;17),\ \ N(2;6;18)$ 2) $M(-9;12;33),\ \ N(18;6;2)$

Решение

Пусть $M(a_1;a_2;a_3),\ \ N(b_1;b_2;b_3)$ - заданные точки. Условия задачи могут быть записаны в форме системы:

$a_1+b_1=9$

$a_2+b_2=18\to b_2=6$

$a_3+b_3=35$

$a_1+a_2+a_3=36\to a_2=12\to b_1+b_2+b_3=9+18+35-36=26\to\begin{cases} b_1+b_3=20 \\ b_1\cdot b_3=36\end{cases}$

$a_1+a_3=2a_2$ $\qquad b_1=18,\ b_3=2$

$b_1\cdot b_3=b_2^2$ $\qquad b_1=2,\ b_3=18$

Первый вариант $b_1=18, b_2=6, b_3=2\to a_1=-9, a_2=12, a_3=33$.

Второй вариант $b_1=2, b_2=6, b_3=18\to a_1=7, a_2=12, a_3=17$

Задача 3 Ответ: $T=40\pi$, $a=4$.

Решение Пусть $a=\frac{16x^2+\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ значение выражения для некоторого x.

Тогда это x является решением биквадратного уравнения $a(x^2+1)^2 = 16x^2 + (x^2-1)^2 \to (a-1)x^4 + 2(a-7)x^2 + a - 1 = 0$. Его дискриминант по переменной $t = x^2$ равен $D/4 = (a-7)^2 - (a-1)^2 = -6(2a-8) \geq 0 \to a \leq 4$. Уравнение имеет положительные решения по t, если $\frac{a-7}{a-1} \leq 0 \to a \in (1;4]$ т.е. максимальное значение a равно 4.

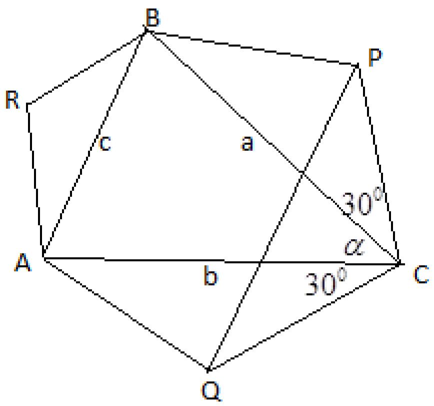
Наименьший период функции $\sin\frac{4x}{5}$ равен $\frac{5\pi}{2}$, а период $\cos\frac{7x}{4}$ равен $\frac{8\pi}{7}$.

Период их суммы $T = \frac{5\pi m}{2} = \frac{8\pi k}{7} \to 35m = 16k \to m = 16t,\ k = 35t, t \in Z$,т.е. $T = 40\pi t$ и наименьший период $T = 40\pi$.

Задача 4 Ответ: 1) $x_1 = a$, $x_2 = -2$, $x_3 = -a/2$ 2) $a = -2,\ a = 0,\ a = 4$

Задача 5 Ответ: $PQ = PR = QR = 4$

Решение



В $\triangle PQC$ $PC = \frac{a}{\sqrt{3}},\ QC = \frac{b}{\sqrt{3}},\ \angle PCQ = \alpha + 60^0$

По теореме косинусов для $\triangle PQC$:

$$PQ^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(\alpha + 60^0) = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{ab}{3}\cos\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{ABC}$$

Здесь S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$.

По теореме косинусов для $\triangle ABC$: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \to -ab\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$.

$$PQ^2 == \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S_{ABC}$$

Из последнего следует, что $PQ = QR = RP$ и треугольник PQR равносторонний.

В варианте 1 $a^2 + b^2 + c^2 = 36$, а $S_{ABC} = 5\sqrt{3}$. Тогда $PQ^2 = 6 + 10 = 16 \to PQ = 4$