1. Общая характеристика заданий

Задание олимпиады Росатом по математике составляется так, чтобы наиболее точно проранжировать участников олимпиады. Задачи олимпиадного задания значительно различаются по сложности. Но и простые и сложные задачи обязательно содержат элементы новизны и оригинальности, требуют для своего решения творческого применения математических теорем и их глубокого понимания. Такая форма задания позволяет, с одной стороны, наиболее точно проранжировать участников олимпиады и выявить наиболее талантливых и способных из них, с другой, «не оттолкнуть» от освоения математики и физики недостаточно подготовленных участников и мотивировать их к дальнейшей самостоятельной работе.

Задачи охватывают все разделы школьной программы и, как правило, носят комплексный характер, требующий объединения различных математических методов. Тем не менее, для решения олимпиадного задания совершенно достаточно знания школьной программы по физике или математике и не требуются какие-то специальные знания и навыки.

Поскольку и отборочный и заключительный тур олимпиады проходят на нескольких региональных площадках в разные сроки, методическая комиссия в рамках единого методического подхода готовит несколько комплектов заданий для отборочного тура и несколько комплектов для заключительного одного уровня сложности.

2. 2013-2014 учебный год

2.1 Олимпиада им. И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. Найти целые числа x, для которых выражение $\dfrac{x^3+3x^2+5}{x^2+2x-3}$ принимает целые значения.

2. Изобразить на единичном тригонометрическом круге точки, соответствующие решениям уравнения: $16\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)-9\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-10\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+3=0$. Отмеченные точки являются вершинами многоугольника, вписанного в круг. Найти его площадь.

3. Луг, размером 100 га, с учетом постоянного роста травы может прокормить 32 коров в течении 180 дней, а точно такой же луг, но размером 50 га, может обеспечить кормом 20 коров в течении 80. Сколько коров могут найти себе корм на лугу в 30га в течении 36дней, если количество травы потребляемой коровой каждый день, скорость произрастания травы на 1 га луга постоянные?

4. Найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение $4x^2+ax-5=0$ имеет рациональные корни.

5. При каких значениях p отрезок $[1;2]$ принадлежит множеству E_y значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2-px+3}{x-1}$?

6. Бильярдный стол имеет форму круга радиуса $2\sqrt{2}$, с центром в точке O. Шар расположен в точке М, находящейся на расстоянии 1 от точки O. Под каким углом к лучу OM надо послать шар, чтобы он, дважды отразившись от борта, прошел через точку М? Отражение шара от борта подчиняется правилу математического бильярда: шар – точка, угол «падения» шара на касательную, проведенную в точке соприкосновения шара в бортом, равен углу «отражения» шара от той же касательной. Запрещается направлять шар по прямой OM .

2.3. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Числа $a_1 = 2,\ a_2, a_3$ – первые три члена возрастающей арифметической прогрессии. Известно, что число $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ является решением уравнения $\sqrt{x+463} = x - 43$. Найти сумму первых 15 членов прогрессии.

2. При каких значениях a система $\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x = \sin^2 y \end{cases}$ имеет бесконечное число решений в прямоугольнике $\begin{cases} 2\pi \le x \le 5\pi \\ -\pi \le y \le 3\pi \end{cases}$?

3. Найти целые числа x, y, z, для которых $z = \dfrac{xyz+1}{x^2+1}$. Указать среди них те, для которых $x + y + z = 4$

4. Найти простые числа x и y, если сумма всех натуральных делителей числа $a = 2^6 \cdot x \cdot y$ в $\dfrac{127}{40}$ раза больше a.

5. При каких значениях a уравнение $x^2 - |ax+5| = 0$ имеет на отрезке $[1;3]$ единственное решение?

6. Две окружности имеют один центр и радиусы 4 и 3. Две вершины квадрата принадлежат одной окружности, а две другие – другой. Найти площадь квадрата.

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Отношение суммы любых трех последовательных членов возрастающей геометрической прогрессии к второму из них равно $\frac{7}{2}$. Найти b_{55} член прогрессии, если $b_{24}=1$.

2. Координаты $(x;y)$ точек на плоскости являются решениями системы:

$$\begin{cases} tg(x+y)=-\sqrt{3}\sin x+\cos y \\ tg(x-y)=-\sqrt{3}\sin x-\cos y \end{cases}.$$

Сколько таких точек находится в квадрате $-\pi\le x\le 0,\ 0\le y\le\pi$ и каковы их координаты?

3. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, для которых $x+y=100$, а выражение $2^{2x+1}+2^{3y-2}$ целое и делится на 3.

4. Координаты $(x;y)$ вершин многоугольника на плоскости являются решениями системы $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=24 \\ x^2+4x+y=11 \end{cases}$. Найти площадь многоугольника.

5. Найти значения a, при которых множество решений уравнения $\sin(\pi ax)-\cos(\pi ax)=1$ содержит все решения уравнения $x^2=3\sqrt{x^2-16}+4\sqrt{x^2-9}$.

6. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от прямой AB, длины хорд AC и BD равны 2 и 4 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E, причем $AE:EB=1:3$. Найти радиус окружности.

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. Величина $\dfrac{1-4x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x>0$. Найти наименьшее, возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.
2. Найти множество значений функции $tg 2x$ на множестве решений уравнения $\sin 3x + 2\cos^3 x = 2\cos x$.
3. Найти наименьший возможный диаметр шара в пространстве, которому принадлежат все точки M с координатами $(x;y;z)$ – решениями системы уравнений: $\begin{cases} y+z=3xyz, \\ z+x=4xyz, \\ x+y=5xyz. \end{cases}$

4. Найти целые, положительные числа x, простые делители которого только двойки или семерки, а общее число натуральных делителей числа x^3 в восемь раз больше числа всех натуральных делителей x.

5. При каких значениях a система $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ \big||x-|x-ay|\big|=y \end{cases}$ имеет целые решения?

6. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3 радиусов 3, 5 и 6 так, что 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружности K_1; 2) вершина C принадлежит окружности K_3. Найти катеты треугольника ABC.

2.5. Олимпиада имени академика И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады Росатом), 11 класс

1. При каких x и $b>0$ числа $a_1=\sqrt{4x-3}$, $a_2=0,5x+2$, $a_3=4$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, а степени $b^{a_1}, b^{a_2}, b^{a_3}$ - последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=4$?

2. Значение функции $f(x)$ для любых x равно наибольшему из чисел $\sin x$ и $\cos x$.

Решить уравнение: $4f(x)=(3+\sqrt{3})\sin x+\left(3-\sqrt{3}\right)\cos x$ и найти число решений уравнения на отрезке $[-7\pi/2;\pi]$.

3. Общий призовой фонд турнира по волейболу не менее 37 т.р. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 т.р. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получит половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда – половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья – половину остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег, в кассе осталось не более 4 т.р. Какое минимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

4. Пусть x - целое положительное число. Обозначим через $x!$ целое число, равное произведению всех целых чисел, не превосходящих x (факториал числа x). Найти наименьшее число x, для которого $x!$ делится на 1600000000 без остатка.

5. При каких значениях α система уравнений $\begin{cases} \left(|x+y|-2\sqrt{2}\right)\left(|x-y|-2\sqrt{2}\right)=0 \\ \left(x-3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2+\left(y-3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2=1 \end{cases}$

не имеет решений?

6. На плоскости P лежат три куба с ребрами $1, 2$ и 3. Их основания расположены на плоскости P так, как это изображено на рис. Плоскость Q, пересекая кубы, делит каждый из них на равновеликие части. Найти тангенс угла между плоскостями P и Q.