2.11. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1) $a=3,\ b=12,\ c=48$ 2) $a=363,\ b=462,\ c=588$

Система условий: $\begin{cases} b^2=ac \\ a+c=2b+27 \\ (a-2)(c-12)=(b-6)^2 \end{cases} \to \begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2b+27 \\ 6a+c=6(b-1) \end{cases} \to$

$a=\dfrac{4b-33}{5};\quad c=\dfrac{6b+168}{5}\to(4b-33)(6b+168)=25b^2\to b^2-474b+5544=0$

$\left[\begin{array}{l} b=12\to a=3,\ c=48 \\ b=462\to a=363,\ c=588 \end{array}\right.$

Задача 2 Ответ: 1) $a_{\min}=2$ 2) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2},\ m,k\in Z$

$$B=-2+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 y}=-2+\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y}$$

$$u=\sin^2 x, v=\sin^2 y\,,\quad u+v=1,\ B=-2+\frac{1}{u(1-u)}$$

Минимальное значение $u(1-u)$ достигается при $u=v=\frac{1}{2}$ и равно 2.

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\to x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\qquad \sin^2 y=\frac{1}{2}\to y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ m,k\in Z$$

Задача 3 Ответ: A=654, A=456

$A=100x+10y+z,\ B=10x+y,\ C=10y+z$

Случай 1. $B\ge C$

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 10x-9y-z=11 \end{cases}\to 11x-8y=26\to x=2k\to 11k-4y=13\to\begin{cases} k=3+4t \\ y=5+11t \end{cases}$$

С учетом цифр $t=0\to x=6,\ y=5,\ z=4\to A=654.$

Случай 2. $B<C$

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 10x-9y-z=-11 \end{cases}\to 11x-8y=4\to x=4k\to 11k-2y=1\to\begin{cases} k=1+2t \\ y=5+11t \end{cases}$$

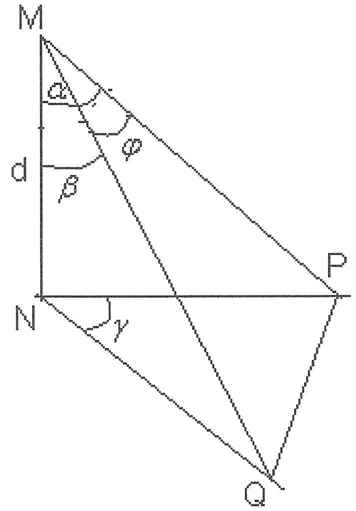
С учетом цифр $t=0\to x=4,\ y=5,\ z=6\to A=456.$

Задача 4 Ответ: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}+0,9n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

$$S_n=(1,9-0,1)+(2,9-0,01)+(3,9-0,001)+...=$$
$$=1+2+...+n+0,9n-(0,1+0,01+0,001+...)=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+0,9n+\frac{0,1\left(1-(0,1)^n\right)}{1-0,1}=\frac{n(n+1)}{2}+0,9n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

Задача 5 Ответ: $\cos\varphi=\frac{1}{8}\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)$

Решение.



$\measuredangle MNP=\alpha,\ \ \measuredangle MNQ=\beta,\ \measuredangle PNQ=\gamma$ – двугранный, $\ \measuredangle PNQ=\varphi$ – искомый

Обозначение: $MN=d$

$PN=d\cdot tg\alpha,\quad QN=d\cdot tg\beta,\quad PM=d/\cos\alpha,\quad QM=d/\cos\beta$

Т. косинусов для $\triangle PNQ$:

Т. косинусов для $\triangle PNQ$:

$$PQ^2 = d^2\left(tg^2\alpha + tg^2\beta - 2tg\alpha \cdot tg\beta \cdot \cos\gamma\right)$$

Т. косинусов для $\triangle PMQ$:

$$PQ^2 = d^2\left(1/\cos^2\alpha + 1/\cos^2\beta - \frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\cos\varphi\right) \to$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\cos\varphi = tg^2\alpha + tg^2\beta - \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma \to$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cdot\cos\gamma = \cos\varphi$$

В задании: $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 60^0 \to \cos\varphi = \frac{1}{8}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$