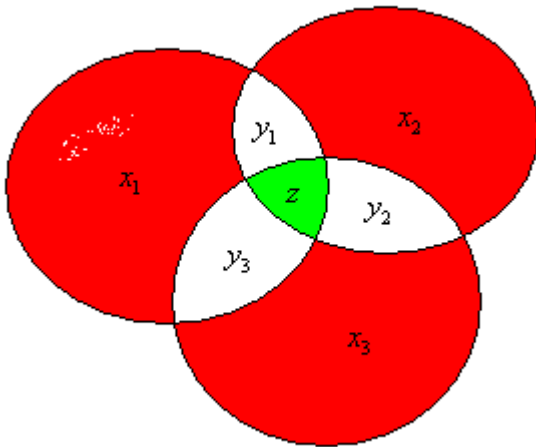


## **Ответы и решения**

Задача 1 Ответ: на 10 вопросов

Решение.



Число сложных вопросов (красные)  $x = x_1 + x_2 + x_3$ ,

число легких вопросов (зеленые)  $z$

Число «средних» (белые)  $y = y_1 + y_2 + y_3$

По условию  $x + y + z = b$  и  $\begin{cases} x_1 + y_1 + y_3 + z = a_1 \\ x_2 + y_1 + y_2 + z = a_2 \\ x_3 + y_2 + y_3 + z = a_3 \end{cases}$ . Складывая уравнения, получим

$$x + 2y + 3z = a_1 + a_2 + a_3. \text{ Тогда } x - z = 2b - a_1 - a_2 - a_3$$

Задача 2

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \quad R_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение: Обозначим  $t = xy$ . Тогда  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2t = 9 - 2t$ .

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 27 - 9t$$

$$x^4 + y^4 = (9 - 2t)^2 - 2t^2 = 81 - 36t + 2t^2$$

$$\text{Второе уравнение: } 9 - 2t + 2(27 - 9t) + 3(81 - 36t + 2t^2) = 74 \rightarrow$$

$$3t^2 - 64t + 116 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{58}{3} \end{cases}$$

$$\text{Для первого корня } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Для второго корня система не совместна.

Расстояние между точками равно  $\sqrt{2}$ , поэтому  $R_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 3

Ответ: 3, 4, 5

Решение:  $x, y$  – катеты,  $z$  – гипотенуза.

$$\text{Условие задачи: } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = xy \end{cases} \rightarrow z = xy - x - y \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = x^2 y^2 - 2(x + y)xy + x^2 + 2xy + y^2 \rightarrow xy(xy - 2(x + y) + 2) = 0$$

$$y(x - 2) = 2x - 2 \rightarrow y = 2 + \frac{2}{x - 2}$$

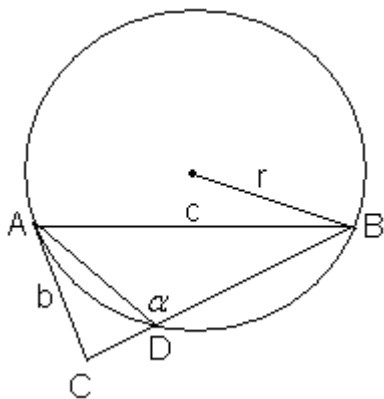
$$\text{Целочисленность: } x - 2 = \pm 1, x - 2 = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow z = 5$$

Задача 4 Ответ:  $a = 1258$

Задача 5

$$\text{Ответ: } R = \frac{r \cdot b}{c} = \frac{6}{5}$$

Решение.



$$c = 2r \sin \alpha, b = 2R \sin \angle ADC \rightarrow \frac{c}{b} = \frac{r}{R} \rightarrow R = \frac{br}{c},$$

т.к.  $\sin \alpha = \sin \angle ADC$