

Решение варианта №1

Задача 1 (8 баллов). Число **357,45**, заданное в десятичной системе счисления, перевели в восьмеричную систему счисления. Найти **1997**-ю цифру после запятой.

Решение.

Поскольку надо найти 1997-ю цифру после запятой, достаточно перевести в восьмеричную систему счисления дробную часть, т.е. число 0,45.

$$0,45 \cdot 8 = 3,6$$

$$0,6 \cdot 8 = 4,8$$

$$0,8 \cdot 8 = 6,4$$

$$0,4 \cdot 8 = 3,2$$

$$0,2 \cdot 8 = 1,6$$

Получили $0,45_{10} = 0,3(4631)_8$.

Первая цифра после запятой – три; остаются 1996 цифр, находящихся в периодической части. Число 1996 кратно 4-м. Следовательно, 1997-й цифрой будет 1.

Ответ: 1.

Задача 2 (8 баллов). Найти два целых положительных числа, зная, что их разность равна **66**, а их наименьшее общее кратное равно **360**.

Ответ: 24 и 90.

Задача 3 (8 баллов). На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость **15** прямых?

Ответ: В общем случае решение будет таким: n прямых могут разделить плоскость на $1+n(n+1)/2$ частей. При $n=15$ будем иметь 121.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию $(C \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B + C)) \rightarrow (A \neg C + \neg B \leftrightarrow A \neg BC)$. Упрощенный вид должен содержать не более 3-х логических операций.

Ответ: $C + B \neg A$.

Задача 5 (8 баллов). Ученик должен перемножить два трехзначных числа и полученное произведение разделить на пятизначное число. Но он не заметил знака умножения и принял оба рядом стоящие числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное оказалось в три раза больше истинного. Определить все три числа

Ответ: 167 и 334; пятизначное число 27889.

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $a^2 + b^2 + c^2$, где \wedge - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

Ответ: $(a^2 + b^2 + c^2)^3$.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = -1, a_2 = 1$ и каждое a_n , начиная с a_3 , есть $a_n = -2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$.

Ответ: $a_n = (-1)^n$.

Задача 8 (12 баллов). Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучи переложили во вторую $1/n$ -ю часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $1/n$ -ю часть оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $1/n$ -ю часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и т. д. Наконец, из n -ой кучки $1/n$ -ю часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало A руб. Сколько денег в каждой кучке было до перекладывания (рассмотреть случай $n=5$)?

Ответ: $x_1 = n(n-2)/(n-1)^2 * A$, $x_2 = (n^2 - 2n + 2)/(n-1)^2 * A$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n = A$.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=217; b: byte=101; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=217, b=101; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Ответ: 252.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение задачи 10.

После первичного заполнения матрица D будет иметь вид:

-1	1	-2	2	-3
3	-4	4	-5	5
-6	6	-7	7	-8
8	-9	9	-10	10
-11	11	-12	12	-13

Для k=0 матрица D будет иметь вид:

-2	-1	-4	0	-5
1	-4	-3	-5	-4
-8	-9	-12	-8	-13
6	-9	2	-10	1
-13	-14	-17	-13	-18

Для k=1 матрица D будет иметь вид:

-2	-5	-8	-10	-9
-3	-8	-11	-13	-12
-12	-17	-28	-30	-29
-12	-17	-28	-30	-29
-17	-22	-33	-35	-34

Ответ: Элементы побочной диагонали: -17 -17 -28 -13 -9.

Решение варианта №2

Задача 1 (8 баллов). Число **10,2**, заданное в десятичной системе счисления, перевели в восьмеричную систему счисления. Найти **1998**-ю цифру после запятой.

Решение.

Поскольку надо найти 1998-ю цифру после запятой, достаточно перевести в восьмеричную систему счисления дробную часть, т.е. число 0,2.

$$0,2 \cdot 8 = 1,6$$

$$0,6 \cdot 8 = 4,8$$

$$0,8 \cdot 8 = 6,4$$

$$0,4 \cdot 8 = 3,2$$

$$0,2 \cdot 8 = 1,6$$

Получили $0,2_{10} = 0,(1463)_8$.

Число 1998 не кратно 4-м. Ближайшее число кратное 4-м, но не превосходящее 1998, будет 1996.

Следовательно, 1998-й цифрой будет 4.

Ответ: 4.

Задача 2 (8 баллов). Сумма цифр трехзначного числа равна **11**, сумма квадратов тех же цифр **45**. Если от искомого числа отнять **198**, то получится обращенное число. Найти это число.

Ответ: 452.

Задача 3 (8 баллов). На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость **15** прямых?

Ответ: В общем случае решение будет таким: n прямых могут разделить плоскость на $1+n(n+1)/2$ частей. При $n=15$ будем иметь 121.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию $((\neg A \leftrightarrow \neg B \neg C) \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg A + \neg C + \neg B)$. Упрощенный вид должен содержать не более 3-х логических операций.

Ответ:

Задача 5 (8 баллов). Найти трехзначное число по следующим условиям: а) его цифры составляют геометрическую прогрессию; б) если из него вычесть **297**, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке; в) если к цифрам данного числа прибавить соответственно **8, 5** и **1**, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию.

Ответ: 421.

Задача 6 (8 баллов). Замените префиксное выражение $a^2 + b^2 + c^2$, где \wedge - знак операции возведения в степень, инфиксным. В искомом результате допустимы лишние круглые скобки, которые не являются ошибкой.

Ответ: $(a^2 + b^2 + c^2)^3$.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = 2, a_2 = 4$ и зная соответствующее количество первых членов последовательности $a_{n+2} - 4 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n = 0$.

Ответ: $a_n = 2^n$.

Задача 8 (12 баллов). Некоторую сумму денег следует выдать нескольким лицам. Первое лицо должно получить сначала a рублей и еще $1/n$ -ю часть того, что останется после этой предварительной выдачи. После того, как выдана первая часть, второе лицо должно получить $2*a$ рублей и еще $1/n$ -ю часть остатка. После уплаты первых двух частей третье лицо должно получить $3*a$ рублей и $1/n$ -ю часть остатка. Наконец, последнее q -е лицо получает $q*a$ руб. Какова первоначальная сумма денег, и каково количество лиц, если известно, что все лица получили одинаковые суммы?

Ответ: $(n - 1)^2 a$; число лиц $n - 1$.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=141; b: byte=77; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=141, b=77; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Ответ: 124.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу D после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее побочной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=max(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MAX(X,Y) ((X) > (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]= MAX(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение задачи 10.

Исходный вид матрицы D:

-1	1	-2	2	-3
3	-4	4	-5	5
-6	6	-7	7	-8
8	-9	9	-10	10
-11	11	-12	12	-13

Вид матрицы D для k=0:

-1	1	-2	2	-3
3	4	4	5	5
-6	6	-7	7	-8
8	9	9	10	10
-11	11	-12	12	-13

Вид матрицы D для k=1:

4	5	9	10	10
7	8	12	13	13
13	14	26	27	27
16	17	29	30	30
18	19	31	32	32

Ответ: Элементы побочной диагонали: 18 17 26 13 10

Решение вариант №3

Задача 1 (8 баллов). Перевести число **123,0703125** из десятичной системы счисления в четверичную систему счисления.

Ответ: 1323,0102₄.

Задача 2 (8 баллов). Некто **N** жил в XIX в. В 1901 г. суммы цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года его рождения. В каком году родился **N**?

Ответ: 1810 г.

Задача 3 (8 баллов). На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

Ответ: $2 + n(n-1)$.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию $(A \rightarrow (B + C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) + \neg(A \rightarrow C))$. Упрощенный вид должен содержать не более 2^x логических операций.

Ответ: $\neg A + B$ или $A \rightarrow B$.

Задача 5 (8 баллов). В шахматном турнире участвовали ученики девятых и десятых классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4.5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники, если каждый с каждым играл один раз.

Ответ: 10.

Задача 6 (8 баллов). Замените инфиксное выражение $(a^2 + b^3)^4$, где \wedge - знак операции возведения в степень, префиксным.

Ответ: $\wedge + \wedge a^2 \wedge b^3 4$.

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для **n**-ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = 2, a_2 = 8$ и зная соответствующее количество первых членов последовательности $a_{n+2} - 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n = 0$.

Ответ: $a_n = n \cdot 2^n$.

Задача 8 (12 баллов). Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по **2**, то значение дроби будет больше **1/4**; если от числителя и знаменателя отнять по **3**, то значение дроби будет меньше **1/10**. Найти эту дробь.

Ответ: 3/8, или 4/15, или 5/24.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=22; b: byte=220; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=22, b=220; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Ответ: 71.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и выпишите элементы ее главной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 = 0) then begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 == 0) D[i][j]=++k; else D[i][j]=--l; for (k=0; k<2; k++) for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Решение задачи 10.

Исходный вид матрицы D:

1	-1	2	-2	3
-3	4	-4	5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	9	-9	10	-10
11	-11	12	-12	13

Матрица D для k=0:

1	-1	2	-2	3
-3	-4	-4	-5	-5
6	-6	7	-7	8
-8	-9	-9	-10	-10
11	-11	12	-12	13

Матрица D для k=1:

-4	-5	-9	-10	-10
-7	-8	-12	-13	-13
-13	-14	-26	-27	-27
-16	-17	-29	-30	-30
-18	-19	-31	-32	-32

Ответ: Элементы главной диагонали: -4 -8 -26 -30 -32.

Решение варианта №4

Задача 1 (8 баллов). Существует ли система счисления, в которой $4 + 5 = 10$ и $4 * 5 = 24$ и $39 + 29 = 70$?

Ответ: НЕТ.

Задача 2 (8 баллов). Некто N жил в XIX в. Суммы цифр года его рождения и смерти одинаковы. Число прожитых им лет начинается цифрой 8. Определить год рождения N .

Ответ: 1809 г.

Задача 3 (8 баллов). На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 15 прямых?

Ответ: 121. В общем случае решение будет таким: n прямых могут разделить плоскость на $1+n(n+1)/2$ частей.

Задача 4 (8 баллов). Упростить логическую функцию $A(A \rightarrow B)(A \leftrightarrow \neg(CB))$. Упрощенный вид должен содержать не более 3-х логических операций.

Ответ: $AB\neg C$.

Задача 5 (8 баллов). В шахматном турнире участвовали два ученика седьмого класса и несколько учеников восьмого класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же количество очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения, зная, что каждый с каждым играл один раз.

Ответ: 7 или 14.

Задача 6 (8 баллов). Замените инфиксное выражение $(a^2+b)(c+d^2)$, где \wedge - знак операции возведения в степень, префиксным.

Ответ: $*+^2a2b+c^2d$

Задача 7 (12 баллов). Решить рекуррентную функцию, т. е. найти формулу для n -ого члена ряда чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, если $a_1 = 0, a_2 = -4$ и зная соответствующее количество первых членов последовательности $a_{n+2} - 4 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n = 0$.

Ответ: $a_n = (1-n)2^n$.

Задача 8 (12 баллов). Учитель предложил трем ученикам перемножить два числа. После умножения множимого на отдельные цифры множителя один из учеников при сложении частных произведений забыл удержать в уме одну единицу некоторого разряда. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 971, а в остатке 214. Второй ученик в указанном разряде не сделал ошибки, но при сложении цифр следующего разряда забыл прибавить двойку. Делая проверку таким же образом, как первый, он получил в частном 365, а в остатке 198. Третий сделал подобную же ошибку на единицу в следующем высшем разряде и получил при проверке в частном 940, а в остатке 48. Определить данные для умножения числа и указать, в каких местах были сделаны ошибки.

Ответ: 972 и 314. Первый ученик уменьшил на единицу число сотен, второй уменьшил на две единицы число тысяч, третий уменьшил на единицу число десятков тысяч.

Задача 9 (12 баллов). Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

Pascal	C
<pre>var a: byte=54; b: byte=108; begin writeln(byte(not(byte(b shl 1) and byte(b shr 1))) and (byte((a or b) shr 1) or byte((a and b) shl 1))); end.</pre>	<pre>typedef unsigned char byte; int main() { byte a=54, b=108; printf("%d\n", (byte)(~((byte)(b << 1) & (byte)(b >> 1))) & ((byte)((a b) >> 1) (byte)((a & b) << 1))); return 0; }</pre>

Ответ: 111.

Задача 10 (16 баллов). Постройте матрицу **D** после выполнения следующей программы и вычислите сумму элементов строго ниже побочной диагонали:

Pascal	C
<pre>const n=5; var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer; var i, j, k, l: integer; begin k:=0; l:=0; for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do if ((i+j) mod 2 <> 0) then begin k:=k-1; D[i,j]:=k; end else begin l:=l+1; D[i,j]:=l; end; for k:=0 to 1 do for j:=0 to n-1 do for i:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]); end.</pre>	<pre>#define MIN(X,Y) ((X) < (Y) ? (X) : (Y)) const int n=5; int D[n][n]; int main() { int i, j, k=0, l=0; for (i=0; i<n; i++) for (j=0; j<n; j++) if ((i+j) % 2 != 0) D[i][j]=--k; else D[i][j]=++l; for (k=0; k<2; k++) for (j=0; j<n; j++) for (i=0; i<n; i++) D[i][j]=MIN(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]); return 0; }</pre>

Окончательный вид матрицы D:

```
-4   -5   -9   -10  -10
-7   -8   -12  -13  -13
-13  -14  -26  -27  -27
-16  -17  -29  -30  -30
-18  -19  -31  -32  -32
```

Ответ: Сумма элементов матрицы D строго ниже побочной диагонали: -270.