10 класс

Вариант 1

Задание 1

Бельчонок заметил, что на трех деревьях выросло в сумме 120 орехов, а на каждом дереве в отдельности – не более 45. Докажите, что количества орехов на любой паре деревьев отличаются не больше, чем на 15.

Задание 2

Целые числа a, b таковы, что $a^2 - 2027ab + b^2$ делится на 2029. Докажите, что $a^2 - b^2$ делится на 2029.

Задание 3

Дана трапеция $ABCD$. Через O обозначим точку пересечения её диагоналей, а через L – точку симметричную B относительно O. Прямая, проходящая через точки C и L, пересекает основание AD в точке K. Докажите, что площадь треугольника AOK равна сумме площадей треугольников AOB и DOK.

Задание 4

Функция f задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеют места неравенства: $f(2x+1) \geq f(x+1)$ и $f(6x+1) \leq f(3x+1)$. Известно, что $f(3)=2$. Докажите, что уравнение $f(x)=2$ имеет не менее 2017 решений.

Задание 5

В отборочном этапе шахматного турнира участвовало n бельчат-шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже k –го. Если два бельчонка набирают одинаковое число очков, то место определяется по рейтингу (рейтинг у всех разный). При каком наименьшем количестве очков можно пройти в основной турнир? Предполагается, что в шахматах победа даёт одно очко, ничья – пол-очка, а поражение – ноль очков.

10 класс

Вариант 2

Задание 1

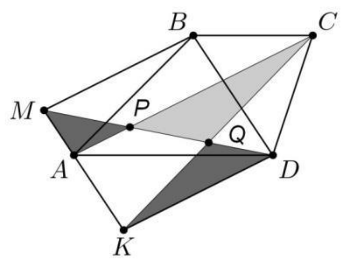
Три бельчонка за зиму вместе съели 750 орехов. При этом каждый из них съел не более 280 орехов. Докажите, что количество съеденных орехов любыми двумя бельчатами отличаются не больше, чем на 90.

Задание 2

Целые числа a, b таковы, что $a^2 - 2025ab + b^2$ делится на 2027. Докажите, что $a^2 - b^2$ делится на 2027.

Задание 3

Дана трапеция $ABCD$ и параллелограмм $BDKM$ (см. рисунок), причём $KD \parallel AC$. Докажите, что площадь треугольника CPQ равна сумме площадей треугольников APM и KQD.



Задание 4

Функция f задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеют места неравенства: $f(3x+1) \geq f(x+1)$ и $f(6x+1) \leq f(2x+1)$. Известно, что $f(2) = 3$. Докажите, что уравнение $f(x) = 3$ имеет не менее 2017 решений.

Задание 5

В отборочном этапе шахматного турнира участвовало n бельчат-шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже k –го. Если два бельчонка набирают одинаковое число очков, то место определяется по рейтингу (рейтинг у всех разный). При каком наименьшем количестве очков можно пройти в основной турнир независимо от результатов других игр и рейтинга? Предполагается, что в шахматах победа даёт одно очко, ничья – пол-очка, а поражение – ноль очков.