9 класс

Вариант 1

Задание 1

Из цифр от 1 до 9 выбрали 8 цифр, и составили из них четыре двузначных числа. Сумма этих чисел равна 205. Какая цифра не использована?

Решение: Остаток от деления на 9 числа равен остатку от деления на 9 суммы его цифр. Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, и делится на 9. Число 205 имеет остаток от деления на 9, равный 7. Чтобы делиться на 9, не хватает 2 – эта цифра и не использована.

Ответ: 2

Задание 2

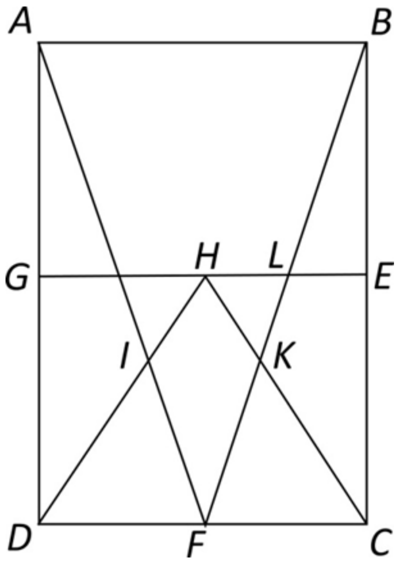
У квадратных трёхчленов g_1 (x)=x^2+ax+b и g_2 (x)=x^2+cx+d существует по два корня, причём все корни – отрицательные целые числа, а один из корней – общий. Существует ли такое положительное целое число m, что g_1 (m)=20,g_2 (m)=17?

Решение: Пусть x_1 – общий корень рассматриваемых трёхчленов, а x_2 и x_3 – два других (различных) корня. Тогда $g_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $g_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)$. *Если такое число m существует, то* $20 = g_1(m) = (m - x_1)(m - x_2)$, $17 = g_2(m) = (m - x_1)(m - x_3)$. *Тогда целое число* $m - x_1$ *должно быть общим делителем взаимно простых чисел 20 и 17 и, значит, должно равняться 1 или -1. Но в обоих случаях* $x_1 = m \pm 1 \geq 0$, *что противоречит отрицательности корней.*

Ответ: нет

Задание 3

В прямоугольнике ABCD сторона AB=1,BC=2, точки E,F,G – середины сторон BC,CD и AD соответственно. Точка H – середина GE. DH и AF пересекаются в точке I, GH и BF пересекаются в точке K. Найдите площадь четырёхугольника FIHK.



Решение: Обозначим L точку пересечения BF и GE. Отрезок LE – средняя линия Δ FBC, поэтому LE = 0,5 и HL = 0,5. Треугольники KCF и HKL подобны, коэффициент подобия равен отношению оснований, то есть 2. Следовательно, FK:KL=2, откуда FK:FB=1:3. Треугольники FAB и FIK подобны, коэффициент подобия равен FB:FK=3. Отсюда длина отрезка IK равна 1/3. Четырёхугольник FIHK состоит из двух треугольников с общим основанием IK, сумма высот этих треугольников равна 1. Поэтому площадь FIHK=(1/3)/2=1/6.

Ответ: 1/6

Задание 4

В 1000 научных библиотеках есть книги по астрономии, астрофизике и астрологии. Число книг по астрономии в каждой библиотеке равно числу книг по астрофизике во всех остальных библиотеках вместе, а число книг по астрофизике в каждой библиотеке равно числу книг по астрологии во всех остальных библиотеках вместе. Докажите, что общее число книг делится на 19.

Решение и ответ: Обозначим x_i *– число книг по астрологии в i-й библиотеке,* y_i *– число книг по астрофизике в i-й библиотеке,* z_i *– число книг по астрономии в i-й библиотеке. Тогда* $y_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_{1000}$, $y_2 = x_1 + x_3 + \cdots + x_{1000}$, *и т.д. Складывая эти равенства, получим, что*

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{1000} = 999 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1000}).$$

Таким образом, общее число книг по астрофизике в 999 раз больше числа книг по астрологии. *Аналогично,* $z_1 + z_2 + \cdots + z_{1000} = 999 \cdot (y_1 + y_2 + \cdots y_{1000}) = 999^2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1000})$. *Пусть общее число книг по астрологии равно К. Тогда общее число книг во всех библиотеках равно* $(999^2 + 999 + 1) \cdot K$. *Остаток числа 999 от деления на 19 равен 11, остаток от деления на 19 числа* 999^2 *равен остатку от деления числа* 11^2, *и это 7. Поэтому* $(999^2 + 999 + 1) \equiv (7 + 11 + 1) \equiv 0 \pmod{19}$.

Задание 5

У бельчонка-художника были синяя, красная, зелёная краски. Он раскрасил стороны правильного семиугольника и решил каждый день рисовать такой же семиугольник, и раскрашивать его стороны другим способом (раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми). Бельчонок-математик стал считать, сколько существует способов раскраски, если смешивать краски нельзя, и каждый раз можно использовать одну, две или три краски. Какой ответ он должен получить?

Решение: Рассмотрим сначала неподвижный семиугольник. Каждую сторону можно раскрасить 3 способами, тогда 7 вершин можно раскрасить 3^7 способами. Среди этих раскрасок есть 3 одноцветных, которые не меняются при повороте. Каждая из оставшихся раскрасок при поворотах даёт ещё 6 раскрасок, то есть 7 раскрасок получаются друг из друга поворотами. Поэтому различных неодноцветных раскрасок в 7 раз меньше: (3^7-3)/7 , а всего раскрасок $\frac{3^7-3}{7} + 3$.

Ответ: $\frac{3^7-3}{7} + 3$

9 класс

Вариант 2

Задание 1

Из цифр от 1 до 9 составили два трёхзначных и два двузначных числа так, что все цифры были использованы. Сумма этих чисел равна 934. Какая цифра использована два раза?

Решение: Остаток от деления на 9 числа равен остатку от деления на 9 суммы его цифр. Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, и делится на 9. Число 934 имеет остаток от деления на 9, равный 7, а это означает, что цифра 7 использована два раза.

Ответ: 7

Задание 2

На пяти карточках написаны коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. На четырёх карточках стоят числа 8,2,3,-7. Какое число стоит на пятой карточке?

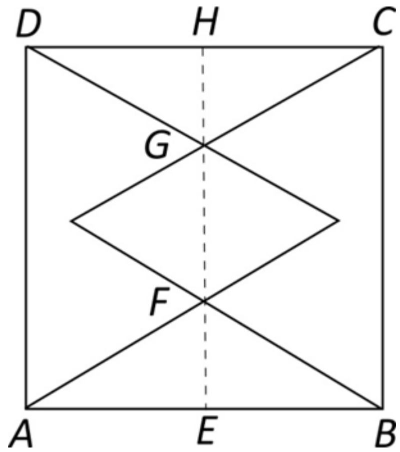
Решение: Пусть трёхчлен имеет коэффициенты a, b, c, *и корни* e *и* f. *По теореме Виета* $\frac{c}{a} = ef, \frac{b}{a} = -(e+f)$, *откуда* $c = aef, b = -a(e+f)$. *Поэтому* c *должно делиться по крайней мере на* 3 *числа, но среди чисел* $8, 2, 3, -7$ *такого нет, следовательно, на пятой карточке число* c. *Значит, число* b *находится среди чисел* $8, 2, 3, -7$, *и оно должно делиться на* a, *поэтому* $b = 8$, $a = 2$. *Следовательно,* 3 *и* -7 *– корни, а* c *тогда равно* -42.

Ответ: -42

Задание 3

В квадрате со стороной 2√3 расположены два равносторонних треугольника, так, что основаниями этих треугольников являются противоположные стороны квадрата. Пересечение треугольников является ромбом. Найдите площадь ромба.

Решение: Продлим диагональ ромба GF *до пересечения со сторонами квадрата в точках* H *и* E. *Легко видеть, что* HE *– ось симметрии квадрата (при симметрии относительно* HE *третьи вершины треугольников переходят друг в друга, а значит, и вершины* A *и* B, D *и* C *переходят друг в друга). У ромба два угла по* $60°$, *значит, каждый из двух других углов равен* $120°$ *и ромб состоит из двух равносторонних треугольников.*



В прямоугольном треугольнике AFE *угол* $FAE = 30°$ *и* $AE = \sqrt{3}$, *обозначим* $FE = x$ *и по теореме Пифагора найдём* $4x^2 - x^2 = 3$, *откуда* $x = 1$. *Аналогично,* $HG = 1$ и $GF = 2\sqrt{3} - 2$. *Площадь равностороннего треугольника со стороной* a *равна* $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, *подставляя* $a = 2\sqrt{3} - 2$, *получаем* $4\sqrt{3} - 6$, *площадь ромба в* 2 *раза больше и равна* $8\sqrt{3} - 12$.

Ответ: $8\sqrt{3} - 12$

Задание 4

В 48 лесах живут рыжие, серые, бурые и чёрные бельчата. Число рыжих бельчат в каждом лесу равно числу серых бельчат во всех остальных лесах вместе, число серых бельчат в каждом лесу равно числу бурых бельчат во всех остальных лесах вместе, число бурых бельчат в каждом лесу равно числу чёрных бельчат во всех остальных лесах вместе. Докажите, что общее число бельчат делится на 13.

Решение и ответ: Обозначим x_i *– число рыжих бельчат в -м лесу,* y_i *– число серых бельчат в* i*-м лесу,* z_i *– число бурых бельчат в* i*-м лесу,* d_i *– число чёрных бельчат в* i*-м лесу. Тогда* $z_1 = d_2 + d_3 + \cdots + d_{48}$, $z_2 = d_1 + d_3 + \cdots + d_{48}$, *и т.д. Складывая эти равенства, получим, что*

$$z + z_2 + \cdots + z_{48} = 47 \cdot (d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{48}).$$

Таким образом, общее число бурых бельчат в 47 *раз больше числа чёрных бельчат. Аналогично, общее число серых бельчат в* 47 *раз больше числа бурых бельчат, то есть в* 47^2 *раз больше числа чёрных бельчат, а общее число рыжих бельчат в* 47^3 *раз больше числа бурых бельчат. Пусть общее число чёрных бельчат равно К. Тогда общее число бельчат во всех лесах равно* $(47^3 + 47^2 + 47 + 1) \cdot K$. *Остаток числа 47 от деления на 13 равен 8, остаток от деления на 13 числа* 47^2 *равен остатку от деления числа* 8^2, *и это 12, остаток от деления на 13 числа* 47^3 *равен остатку от деления на 13 числа* $8 \cdot 12 = 96$, *и это 5. Поэтому*

$$(47 + 47^2 + 47^3 + 1) \equiv (8 + 12 + 5 + 1) \equiv 26 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 13).$$

Задание 5

Для украшения круглого торта у Жени есть ягоды – брусника, черника, голубика, облепиха. Женя выкладывает по окружности торта через равные расстояния 11 ягод. Сколько существует способов украсить торт, если способы, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми?

Решение: Рассмотрим сначала неподвижный торт, и зафиксируем положение первой ягоды. Туда можно положить 4 *ягоды, то есть для одного места существует* 4 *способа. Тогда в* 11 *мест можно разложить ягоды* 4^{11} *способами. Среди этих способов есть* 4 *варианта использовать только одну ягоду, при повороте новые способы получаться не будут. Каждый из оставшихся вариантов при поворотах даёт ещё* 10 *вариантов, то есть* 11 *вариантов получаются друг из друга поворотами. Поэтому различных вариантов в* 11 *раз меньше:* $\frac{4^{11}-4}{11}$, *а всего способов украсить торт* $\frac{4^{11}-4}{11} + 4$.

Ответ: $\frac{4^{11}-4}{11} + 4$