8 класс

Вариант 1

Задание 1

Каждый из 100 бельчат находится в одном из 100 домиков. На каждом домике написано: «Тут ровно один бельчонок». Из этих надписей – ровно четыре неверных. Найдите количество домиков, в которых находится нечётное число бельчат.

Решение: Из условия следует, что на 96 домиках надписи верны, то есть там находится по одному бельчонку. Допустим, в одном из четырёх домиков, надписи на которых неверны, нечётное число бельчат. Так как в этих четырёх домиках находятся 4 бельчат, а ровно один бельчонок ни в одном из них находиться не может, то в рассматриваемом домике находятся трое бельчат. Но тогда четвёртый находится в одном из оставшихся трёх домиков, и надпись на нем, вопреки нашему предположению, верна. Стало быть, во всех четырех оставшихся домиках нет нечётного числа бельчат.

Ответ: 96

Задание 2

На координатной плоскости нарисованы всевозможные параболы вида y=x^2+px+q, для которых p+1/3 q=2017. Докажите, что все эти параболы проходят через одну точку.

Решение и ответ: Рассмотрим значение y=x^2+px+q в точке x_0=3. Тогда

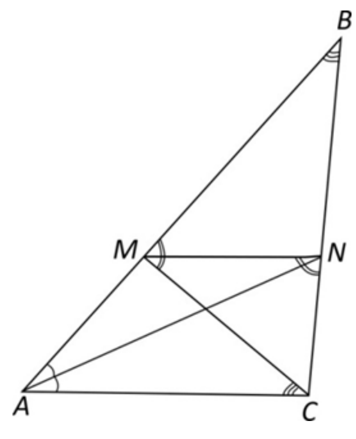
x_0^2+px_0+q=9+3p+q=9+3(p+1/3 q)=9+3·2017=6060.

То есть все эти параболы проходят через точку (3;6060).

Задание 3

В треугольнике ABC на сторонах BC и AB отметили точки M и N соответственно, так что ∠ACM=∠ABC и ∠CNM=∠BMC, а AN – биссектриса угла BAC. Докажите, что AC=MB. 4) Рядом стоят 6 точек. Катя и Миша поочерёдно заменяют одну из точек цифрой, отличной от нуля; начинает Катя. Как надо действовать Мише, чтобы полученное 6-значное число делилось на 11?

Решение и ответ: Нетрудно заметить, что в треугольниках BNM и CMA две пары углов совпадают. Действительно, ∠BNM=∠AMC смежные с равными по условию углами. Значит, и третья пара углов – ∠BMN и ∠BAC – равны. Отсюда NM∥AC. Следовательно, треугольник NMA – равнобедренный, NM=MA, и тогда замеченное в начале решения равенство углов обосновывает равенство треугольников BNM и CMA. Тогда BM=AC как соответственные стороны.



Задание 4

Рядом стоят 6 точек. Катя и Миша поочерёдно заменяют одну из точек цифрой, отличной от нуля; начинает Катя. Как надо действовать Мише, чтобы полученное 6-значное число делилось на 11?

Решение и ответ: Пусть точки занумерованы слева направо натуральными числами от 1 до 6 и разбиты на пары 1 – 4,2 – 5,3 – 6. После каждого хода Кати Миша ставит ту же цифру в оставшуюся позицию пары точек. При этом получается 6-значное число вида abcabc, равное abc·1000+abc=abc·1001, а 1001 делится на 11.

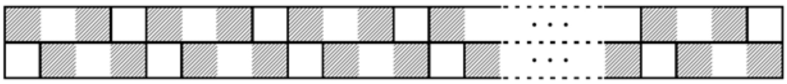
Задание 5

Клетки доски 50×50 раскрашены в шахматном порядке. Имеется много полосок, состоящих из трёх клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок можно накрыть все чёрные клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?

Решение: Развернем доску так, что левая нижняя клетка будет черной. Отметим черные клетки, разности координат которых кратны 4. Такие клетки располагаются на параллельных диагоналях (одна из которых идет из левого нижнего угла), отстоящих друг от друга на 4 клетки. Общее число клеток на этих диагоналях равно

$$50+2\cdot46+2\cdot42+2\cdot38+\cdots+2\cdot2=50+4\cdot(1+3+5+\cdots+23)=50+4\cdot12^2=626.$$

Поскольку каждая полоска покрывает не более одной отмеченной клетки, нам потребуется не менее 626 полосок.



Покажем, что покрыть 626 полосками все черные клетки можно. Заметим, что для покрытия всех черных клеток полосы 48×2 достаточно 24 полосок. Доска 50×50 без углового квадрата 2×2 разрезается па 26 полосы 48×2. Для черных клеток нз полос нам понадобится 26·24=624 полоски, и еще две для чёрных клеток углового квадрата 2×2.

Ответ: 626

8 класс

Вариант 2

Задание 1

У бельчонка каждый из 120 орехов находится в одном из 120 тайников. Он записал на бумажке напротив места каждого тайника: «Тут ровно один орех». Из этих записей – ровно четыре неверных. Найдите количество тайников, в которых лежит нечётное число орехов.

Решение: Из условия следует, что на бумажке напротив мест 116 тайников записи верны, то есть там находится по одному ореху. Допустим, в одном из четырёх оставшихся тайников нечётное число орехов. Так как в этих четырёх тайниках находится 4 ореха, а ровно один орех ни в одном из них находиться не может, в рассматриваемом тайнике находится три ореха. Но тогда четвёртый находится в одном из оставшихся тайников, и запись на бумажке, вопреки нашему предположению, верна. Стало быть, во всех четырех оставшихся тайниках нет нечётного числа орехов.

Ответ: 116

Задание 2

На координатной плоскости нарисованы всевозможные параболы вида y=x^2+px+q, для которых p+1/4 q=2017. Докажите, что все эти параболы проходят через одну точку.

Решение и ответ: Рассмотрим значение y=x^2+px+q в точке x_0=4. Тогда

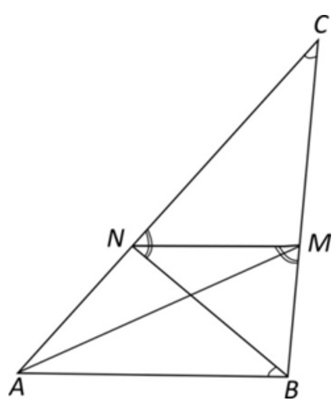
x_0^2+px_0+q=16+4p+q=16+4(p+1/4 q)=16+4·2017=8084.

То есть все эти параболы проходят через точку (4;8084).

Задание 3

В треугольнике ABC на сторонах BC и AC отметили точки M и N соответственно, так что ∠ABN=∠ACB и ∠BMN=∠BNC, а MC=BN. Докажите, что AM – биссектриса угла BAC.

Решение и ответ: Нетрудно заметить, что в треугольниках ABN и CNM две пары углов совпадают. Действительно, ∠BNA=∠NMC смежные с равными по условию углами. Значит, и третья пара углов – ∠CNM и ∠NAB – равны. Отсюда NM∥AB. Тогда ∠NMA=∠MAB. Поскольку MC=BN, то треугольники BMN и CNA равны и треугольник ANM – равнобедренный (AN=NM). Следовательно, ∠NMA=∠MAB=∠NAM. Тогда AM – биссектриса угла BAC.



Задание 4

Вася написал трёхзначное число (abc)‾. Аня может вписать по цифре между a и b, и между b и c, и приписать цифру слева перед a. Как надо действовать Ане, чтобы полученное 6-значное число делилось на 13?

Решение и ответ: Аня должна вписать a между b и c, c между a и b и приписать цифру b слева. При этом получается 6-значное число вида bacbac, равное bac·1000+bac=bac·1001, а 1001 делится на 13.

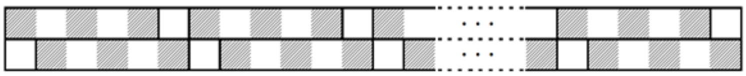
Задание 5

Клетки доски 40×40 раскрашены в шахматном порядке. Имеется много полосок, состоящих из пяти клеток того же размера, что и клетки доски. Каким наименьшим количеством полосок можно накрыть все чёрные клетки доски (полоски могут перекрываться и вылезать за край доски)?

Решение: Развернем доску так, что левая нижняя клетка будет черной. Отметим черные клетки, разности координат которых кратны 6. Такие клетки располагаются на параллельных диагоналях (одна из которых идет из левого нижнего угла), отстоящих друг от друга на 6 клеток. Общее число клеток на этих диагоналях равно

$$40+2\cdot 34+2\cdot 28+2\cdot 22+2-16+2\cdot 10+2-4=40+4\cdot(2+5+8+11+14+17)=268.$$

Поскольку каждая полоска покрывает не более одной отмеченной клетки, нам потребуется не менее 268 полосок.



Покажем, что покрыть 268 полосками все черные клетки можно. Заметим, что для покрытия всех черных клеток полосы 36×2 достаточно 12 полосок. Доска 40×40 без углового квадрата 4×4 разрезается па 22 полосы 36×2. Для черных клеток нз полос нам понадобится 22·12=264 полоски, и еще четыре для черных клеток углового квадрата 4×4. Ответ: 268