7 класс

Вариант 1

Задание 1

Пусть a*b означает 3a-2b. Найдите x, если 2*(5*x)=0.

*Решение: 5*x=15-2x,2*(15-2x)=6-2(15-2x)=4x-24=0, откуда x=6.*

Ответ: 6

Задание 2

Коля перемножил 3 числа, не равных 0. Вася вычел из каждого числа 2, и затем перемножил полученные числа. Могли ли полученные ими произведения быть равными?

Решение: Покажем, что это возможно. Пусть Коля взял числа 3,5,x. После вычитания 2 Вася получил числа 1,3,x-2. Приравнивая произведения, получим уравнение: 5x=x-2, откуда x=-1/2.

Ответ: да

Задание3

Найдите все чётные натуральные числа, меньшие 1000, обладающие свойством: при вычеркивании любой цифры остаётся число, являющееся квадратом натурального числа. Докажите, что других чисел нет.

Решение: Числа не могут быть однозначными, так как при вычеркивании не останется цифр. Из двузначных чисел подходят только числа, состоящие из цифр 1, 4, 9 (квадраты натуральных чисел). Из условия чётности следует, что числа должны оканчиваться на 4, получаем 14, 44, 94. Рассмотрим трёхзначное число. Если из него вычеркнуть вторую или третью цифру, останутся двузначные числа, начинающиеся с одной и той же цифры. Но среди двузначных квадратов (16, 25, 36, 49, 64, 81) нет чисел, начинающихся с одной цифры, следовательно, нет трёхзначных чисел, обладающих требуемым свойством.

Ответ: 14, 44, 94

Задание 4

Антон никогда не пропускает занятия в бассейне, куда он ходит по вторникам и субботам. В декабре он ходил в бассейн 8 раз. На какой день недели приходилось 17 декабря?

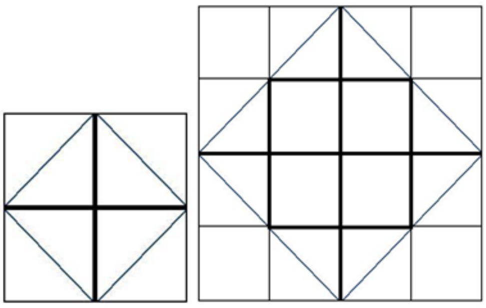
Решение: *Декабрь включает 4 полные недели, то есть 4 вторника и 4 субботы, в эти дни Антон и ходил в бассейн. От месяца остаются 3 дня подряд, не включающие вторник и субботу. Это не могут быть дни от субботы до вторника, так как там всего два дня, значит, это дни от вторника до субботы – среда, четверг, пятница. Эти дни идут после вторника, значит, первый раз Антон ходил в субботу. Если первая суббота приходилась на 1 или 2 или 3 декабря, то в этом декабре 5 суббот, то есть всего 9 дней. Если первая суббота приходилась на 5 декабря, то следующий вторник приходится на 8 декабря,* *и в этом декабре 5 вторников (1, 8, 15, 22, 29), а суббот 4 (5, 12, 19, 26), что тоже даёт 9 посещений бассейна. Аналогичная ситуация, если первая суббота приходилась на 6 или 7 декабря (5 вторников и 4 субботы). Остаётся единственная возможность: если первая суббота приходилась на 4 декабря. Тогда в этом месяце 4 субботы (4, 11, 18, 25), и 4 вторника (7, 14, 21, 28). 17 декабря приходится тогда на пятницу.*

Ответ: пятница

Задание 5

Робот стоит в центре площадки 25 м ×25 м. По команде он начинает шагать. Робот делает каждый шаг в 1 метр, а двигаться может вперёд, назад, вправо или влево. Найдите число различных точек, в которых робот может оказаться а) через 6 шагов, б) через 10 шагов.

Решение: Пусть начальная точка имеет уровень 0. За один шаг робот может продвинуться в 4-х направлениях, и оказаться в 4-х точках уровня 1 (рис. а). Заметим, что все точки лежат на границе серого квадрата так, что на каждой стороне – 2 точки. Из каждой точки уровня 1 следующим шагом робот может попасть в точки уровня 2 (рис. б), или вернуться на уровень 0. Все точки уровня 2 лежат на границе серого квадрата так, что на каждой стороне – 3 точки. Всего есть 8 точек уровня 2. Это число можно найти таким образом: 3·4-4=8 (по 3 точки на стороне, и вычитаем 4, потому что вершины посчитали 2 раза).



(а) (б)

Эта закономерность является постоянной, точки уровня n лежат на границе квадрата, и всего их (n+1)·4-4=4n. Найдём по этой формуле количество точек каждого уровня:

Номер уровня n	0	1	2	3	4	5	6
Число точек $4n$	1	4	8	12	16	20	24

Но шагом с первого уровня можно попасть как на уровень 2, так и на уровень 0 (там всего одна точка), поэтому после 2 шагов можно попасть в 8+1=9 точек. С каждого уровня можно попасть на следующий и предыдущий уровни, поэтому через 4 шага можно попасть на 4-й, 2-й и 0-й уровни, число точек равно 16+8+1=25. Здесь 16 – число новых точек 4-го уровня, 8 – число точек 2-го уровня, 1 – число точек 0-го уровня. Через 6 шагов можно попасть на 6-й, 4-й, 2-й, 0-й уровни, число точек равно 24+16+8+1=49, это ответ к случаю а). Замечая закономерность, получаем и общую *формулу: через n шагов робот может оказаться в* $(n+1)^2$ *точках. Поэтому ответ к пункту б):* $11^2=121$.

Ответ: а) 49, б) 121

7 класс

Вариант 2

Задание 1

Пусть a*b означает 2a-5b. Найдите x, если 3*(5*x)=6.

*Решение: 5*x=10-5x,3*(10-5x)=6-5(10-5x)=25x-44=6, откуда x=2.*

Ответ: 2

Задание 2

Петя перемножил 3 числа, не равных 0. Дима прибавил к каждому числу 3, и затем перемножил полученные числа. Могли ли их произведения быть равными?

Решение: Покажем, что это возможно. Пусть Петя взял числа 1,1,x. После прибавления 3 Дима получил числа 4,4,x+3. Получим уравнение: $x=4\cdot4\cdot(x+3)$, *откуда* $x=-16/5$.

Ответ: да

Задание 3

Найдите все нечётные натуральные числа, меньшие 999, обладающие свойством: при вычеркивании любой цифры остаётся число, являющееся квадратом натурального числа. Докажите, что других чисел нет.

Решение: Числа не могут быть однозначными, так как при вычеркивании не останется цифр. Из двузначных чисел подходят только числа, состоящие из цифр 1,4,9 (квадраты натуральных чисел). Из условия нечётности следует, что числа должны оканчиваться на 1 или 9, получаем 11,41,91,19,49,99. Рассмотрим трёхзначное число. Если из него вычеркнуть вторую или третью цифру, останутся двузначные числа, начинающиеся с одной и той же цифры. Но среди двузначных квадратов (16,25,36,49,64,81) нет чисел, начинающихся с одной цифры, следовательно, нет трёхзначных чисел, обладающих требуемым свойством.

Ответ: 11,41,91,19,49,99

Задание 4

В некотором месяце четвергов было больше, чем воскресений, а три вторника месяца пришлись на нечётные числа. Каким днём недели было 16-е число этого месяца?

Решение: *Поскольку неделя содержит 7 дней, то числа соседних вторников отличаются чётностью. Значит, месяц содержит 5 вторников, причём первый вторник обязательно приходится на нечетное число месяца. Если бы первый вторник был 5-го числа, то пятый вторник должен иметь число, на 28 большее. Но такой даты не существует. Значит, первый вторник может быть 1-го числа (тогда пятый вторник – 29-е), или 3-го числа* *(тогда пятый вторник – 31-е). Если 1-ое число – вторник, то четверги приходятся на даты 3, 10, 17, 24, 31, всего 5 четвергов. Воскресенья приходятся на числа 6, 13, 20, 27, всего 4 воскресенья, условие «четвергов больше, чем воскресений» выполняется. Если 3-е число – вторник, то четверги приходятся на даты 5, 12, 19, 26, всего 4 четверга. Воскресенья в этом случае приходятся на числа 1, 8, 15, 22, 29, всего 5 воскресений, условие «четвергов больше, чем воскресений» не выполняется. Таким образом, 1-ое число – вторник, тогда 15-ое число – вторник и 16-ое число – среда.*

Ответ: среда

Задание 5

Бельчонок сидит на дорожке. На каждом прыжке он может прыгать вперёд, или назад, длина каждого прыжка 1 метр. Каким числом способов бельчонок может вернуться в исходную точку а) за 6 прыжков, б) за 8 прыжков?

Решение: Если бельчонок прыгнул несколько раз вперёд, чтобы вернуться, он должен прыгнуть столько же раз назад. Таким образом, и вперёд, и назад в случае а) надо сделать по три прыжка. Один номер прыжка вперёд может принять 6 значений, другой – 5, третий – 4. Прыжки назад тогда будут иметь оставшиеся номера. По правилу произведения получается 6·5·4=120 прыжков. Но номера в одном наборе можно переставить разными способами, и все эти способы входят в число 120, а задают они один и тот же маршрут. Число способов переставить три разных номера найдём так же с помощью принципа произведения. На первом месте может стоять любой из трёх номеров (3 варианта), на втором любой из оставшихся двух (2 варианта. На последнем месте будет один оставшийся номер (1 вариант). Число перестановок трёх номеров равно произведению чисел вариантов 3·2·1=6. Поэтому маршрутов будет 120:6=20.

В случае б) и вперёд, и назад надо сделать по четыре прыжка. Рассуждая аналогично, получаем, что выбрать номера прыжков вперёд можно числом способов 8·7·6·5=1680, число способов переставить 4 разных номера равно 4·3·2·1=24. Поэтому маршрутов будет 1680:24=70.

Ответ: а) 20, б) 70