10 класс

Вариант 1

Задание 1

Бельчонок заметил, что на трех деревьях выросло в сумме 120 орехов, а на каждом дереве в отдельности – не более 45. Докажите, что количества орехов на любой паре деревьев отличаются не больше, чем на 15.

Решение и ответ: Обозначим через x – максимальное, а через y – минимальное количество орехов на дереве. Предположим, что $x - y > 15$. Поскольку по условию $x \leq 45$, то $y < 30$, и мы в таком случае получаем, что $x + y < 75$. Следовательно, количество орехов, которое приходится на оставшееся дерево, равно $120 - (x + y) > 45$. Получаем противоречие с условием, значит, наше предположение неверно.

Задание 2

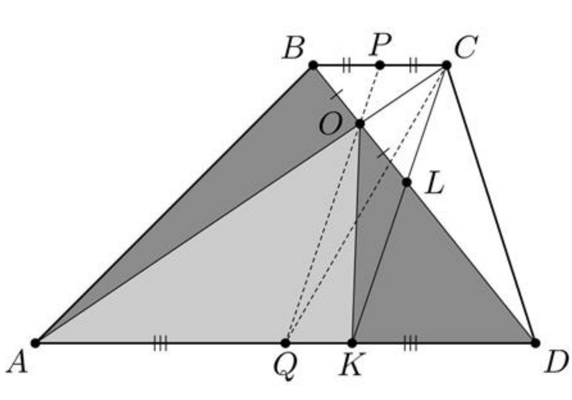
Целые числа a, b таковы, что $a^2 - 2027ab + b^2$ делится на 2029. Докажите, что $a^2 - b^2$ делится на 2029.

Решение и ответ: Если $a^2 - 2027ab + b^2$ делится на 2029, то на 2029 делится также и число $(a^2 - 2027ab + b^2) + 2029ab = (a + b)^2$. Отсюда следует, что на 2029 делится и число $a + b$. Действительно, число 2029 простое, и если бы $a + b$ не делилось на 2029, то 2029 не входило бы в разложение на простые множители числа $a + b$, а значит и числа $(a + b)^2$. Далее, поскольку $a + b$ делится на 2029, то и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ также делится на 2029

Задание 3

Дана трапеция $ABCD$. Через O обозначим точку пересечения её диагоналей, а через L – точку симметричную B относительно O. Прямая, проходящая через точки C и L, пересекает основание AD в точке K. Докажите, что площадь треугольника AOK равна сумме площадей треугольников AOB и DOK.

Решение и ответ: Поскольку $BC \parallel AD$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$, следовательно, $S_{AOB} = S_{DOC}$. Поэтому достаточно доказать, что $S_{AOK} = \frac{1}{2}S_{ACD}$. Пусть P и Q – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Заметим, что прямая PQ проходит через точку O и параллельна прямой CK. CQ – медиана треугольника ACD, откуда $\frac{1}{2}S_{ACD} = S_{CQD} = S_{CQK} + S_{CKD}$. Поскольку $CK \parallel OQ$, то $S_{CQK} = S_{COK}$, следовательно, $S_{CQK} + S_{CKD} = S_{COK} + S_{CKD} = S_{OCDK}$, что и требовалось.



Задание 4

Функция f задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеют места неравенства: $f(2x+1) \geq f(x+1)$ и $f(6x+1) \leq f(3x+1)$. Известно, что $f(3)=2$. Докажите, что уравнение $f(x)=2$ имеет не менее 2017 решений.

Решение и ответ: Подставив во второе неравенство $x=\frac{y}{3}$, *получим, что при любом* y $f(y+1) \geq f(2y+1)$. *Объединив это с первым неравенством, убеждаемся в справедливости равенства* $f(x+1)=f(2x+1)$ *при всех* x. *Далее, мы знаем, что* $f(2+1)=f(3)=2$, *поэтому при любом натуральном* n

$$2=f(2+1)=f(4+1)=f(8+1)=\cdots=f(2^{n-1}+1)=f(2^n+1).$$

Таким образом, уравнение $f(x)=2$ *имеет бесконечно много решений вида* $x=2^n+1$.

Задание 5

В отборочном этапе шахматного турнира участвовало n бельчат-шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже k –го. Если два бельчонка набирают одинаковое число очков, то место определяется по рейтингу (рейтинг у всех разный). При каком наименьшем количестве очков можно пройти в основной турнир? Предполагается, что в шахматах победа даёт одно очко, ничья – пол-очка, а поражение – ноль очков.

Решение: Пусть X – бельчонок, занявший k *–е место. Необходимо найти минимально возможное количество его очков. Сделаем два наблюдения.*

1) Можно считать, что бельчата, занявшие места выше X, выиграли у тех, кто стоит ниже X. В противном случае изменим соответствующие результаты, что не повлияет на место X.

2) Можно считать, что X проиграл всем, кто стоит выше его. Действительно, пусть X не проиграл кому-то из стоящих выше его. Заменим этот результат на проигрыш. Затем результаты X с нижестоящими бельчатами улучшим так, чтобы количество очков X (по возможности) не изменилось. Если в итоге число очков X всё-таки уменьшится, то результат X с нижестоящими бельчатами окажется максимальным, и в силу 1) место X не изменится. Проводя такую операцию несколько раз, мы добьемся желаемого.

Вследствие вышесказанного задача сводится к минимизации количества очков N *набранных победителем турнира с* $n-k+1$ *участником. В этих матчах разыгрывается* $C_{n-k+1}^2=\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ *очков. Победитель набирает наибольшее количество очков, поэтому* $N \geq \frac{n-k}{2}$ *Равенство реализуется, если все бельчата, занявшие место не выше* k *–го, сыграли друг с другом вничью.*

Ответ: $\frac{n-k}{2}$

10 класс

Вариант 2

Задание 1

Три бельчонка за зиму вместе съели 750 орехов. При этом каждый из них съел не более 280 орехов. Докажите, что количество съеденных орехов любыми двумя бельчатами отличаются не больше, чем на 90.

Решение и ответ: Обозначим через x – максимальное, а через y – минимальное количества орехов, которые съели два бельчонка. Предположим, что $x - y > 90$. Поскольку по условию $x \leq 280$, то $y < 190$, и мы в таком случае получаем, что $x + y < 470$. Следовательно, количество орехов, которое приходится на оставшегося бельчонка, равно $750 - (x + y) > 280$. Получаем противоречие с условием, значит, наше предположение неверно.

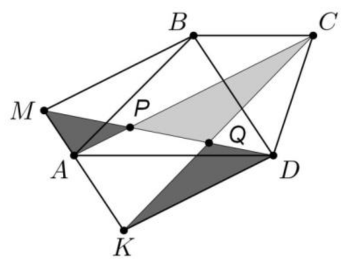
Задание 2

Целые числа a, b таковы, что $a^2 - 2025ab + b^2$ делится на 2027. Докажите, что $a^2 - b^2$ делится на 2027.

Решение и ответ:. Если $a^2 - 2025ab + b^2$ делится на 2027, то на 2027 делится также и число $(a^2 - 2025ab + b^2) + 2027ab = (a + b)^2$. Отсюда следует, что на 2027 делится и число $a + b$. Действительно, число 2027 простое, и если бы $a + b$ не делилось на 2027, то 2027 не входило бы в разложение на простые множители числа $a + b$, а значит и числа $(a + b)^2$. Далее, поскольку $a + b$ делится на 2027, то и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ также делится на 2027.

Задание 3

Дана трапеция $ABCD$ и параллелограмм $BDKM$ (см. рисунок), причём $KD \parallel AC$. Докажите, что площадь треугольника CPQ равна сумме площадей треугольников APM и KQD.



Решение и ответ: Заметим, что утверждение задачи равносильно равенству площадей треугольников KMD и AKC. Так как $AC \parallel KD$, то $AKDC$ – трапеция, следовательно, $S_{AKC} = S_{ADC}$. Аналогично, в трапеции $ABCD$: $S_{ADC} = S_{ADB}$. В то же время, $S_{ADB} = \frac{1}{2} S_{MBDK} = S_{KMD}$. Что и требовалось.

Задание 4

Функция f задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеют места неравенства: $f(3x + 1) \geq f(x + 1)$ и $f(6x + 1) \leq f(2x + 1)$. Известно, что $f(2) = 3$. Докажите, что уравнение $f(x) = 3$ имеет не менее 2017 решений.

Решение и ответ: Подставив во второе неравенство $x = \frac{y}{2}$, получим, что при любом y $f(y + 1) \geq f(3y + 1)$. Объединив это с первым неравенством, убеждаемся в *справедливости равенства* $f(x+1) = f(3x+1)$ *при всех* x. *Далее, мы знаем, что* $f(1+1) = f(2) = 3$, *поэтому при любом натуральном* n

$$2 = f(1+1) = f(3+1) = f(9+1) = \cdots = f(3^{n-1}+1) = f(3^n+1).$$

Таким образом, уравнение $f(x) = 3$ *имеет бесконечно много решений вида* $x = 3^n + 1$.

Задание 5

В отборочном этапе шахматного турнира участвовало n бельчат-шахматистов (каждый сыграл по разу с каждым). Для попадания в основной турнир необходимо занять место не ниже k –го. Если два бельчонка набирают одинаковое число очков, то место определяется по рейтингу (рейтинг у всех разный). При каком наименьшем количестве очков можно пройти в основной турнир независимо от результатов других игр и рейтинга? Предполагается, что в шахматах победа даёт одно очко, ничья – пол-очка, а поражение – ноль очков.

Решение: Пусть X *– шахматист, занявший* $(k+1)$*-е место. Необходимо найти максимально возможную сумму его очков и добавить ней* $\frac{1}{2}$. *Сделаем два наблюдения.*

1) Можно считать, что спортсмены, занявшие места выше X, *выиграли у тех, кто стоит ниже* X. *В противном случае изменим соответствующие результаты, что не повлияет на место* X.

2) Можно считать, что X выиграл у всех, кто стоит ниже его. Действительно, пусть X не выиграл у кого-то из стоящих ниже его. Заменим этот результат на выигрыш. Затем результаты X с вышестоящими соперниками ухудшим так, чтобы количество очков X (по возможности) не изменилось. Если в итоге число очков X всё-таки увеличится, это будет означать, что X проиграл всем вышестоящим соперникам, и в силу 1) место X не изменится. Проводя такую операцию несколько раз, мы добьемся желаемого.

Вследствие вышесказанного задача сводится к максимизации количества очков N, *набранных аутсайдером турнира с* $k+1$ *участником. В этих матчах разыгрывается* $C_{k+1}^2 = \frac{k(k+1)}{2}$ *очков. Аутсайдер набирает наименьшее количество очков, поэтому* $N \leq \frac{k}{2}$. *Равенство реализуется, если все участники, занявшие места не ниже* $(k+1)$*-го, сыграли друг с другом вничью. Ответом будет* $n - k - 1 + N + \frac{1}{2} = \frac{2n-k-1}{2}$ *очков.*

Ответ: $\frac{2n-m-1}{2}$