

М11.1-1 В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является — лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы бумаги, оказалось, что всего записей «лжец» оказалось 48, а записей «рыцарь» — 42. Сколько в комнате лжецов, если известно, что их меньше рыцарей?

М11.1-2 В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является — лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы бумаги, оказалось, что всего записей «лжец» оказалось 42, а записей «рыцарь» — 48. Сколько в комнате лжецов, если известно, что их меньше рыцарей?

М11.2-1 Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $3x + 2y = z$ и $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. Докажите, что число $5x^2 - 4y^2 - z^2$ является целым.

М11.2-2 Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x + 3y = z$ и $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{z}$. Докажите, что число $x^2 - 5y^2 + z^2$ является целым.

М11.3-1 Докажите, что если модуль разности любых двух из трех положительных чисел x, y, z меньше 3, то выполняется неравенство $\sqrt{xy + \frac{9}{4}} + \sqrt{yz + \frac{9}{4}} + \sqrt{zx + \frac{9}{4}} > x + y + z$.

М11.3-2 Докажите, что если модуль разности любых двух из трех положительных чисел x, y, z меньше 4, то выполняется неравенство $\sqrt{xy + 4} + \sqrt{yz + 4} + \sqrt{zx + 4} > x + y + z$.

М11.4-1 На медиане AM треугольника ABC выбрана точка K так, что $\angle BAC + \angle BKC = 180^\circ$. Какое *максимальное* значение может принимать разность $AB \cdot CK - AC \cdot BK$, если $AB = 5$?

М11.4-2 На медиане AM треугольника ABC выбрана точка K так, что $\angle BAC + \angle BKC = 180^\circ$. Какое *максимальное* значение может принимать разность $AB \cdot CK - AC \cdot BK$, если $AC = 3$?