21-ая Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5-6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждением задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2-3 балла;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

M9.1-1 Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2+px+q$, у которых $p+\frac{1}{4}q = 1000$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

Решение. Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 4$. Тогда

$$y = x_0^2 + px_0 + q = 16 + 4p + q = 16 + 4\left(p + \frac{q}{4}\right) = 4016,$$

то есть графики всех трехчленов проходят через точку $(4; 4016)$.

M9.1-2 Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2+px+q$, у которых $p+\frac{1}{3}q = 1000$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

Решение. Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 3$. Тогда

$$y = x_0^2 + px_0 + q = 9 + 3p + q = 9 + 3\left(p + \frac{q}{3}\right) = 3009,$$

то есть графики всех трехчленов проходят через точку $(3; 3099)$.

Комментарий. Несущественная арифметическая ошибка — снять 1 балл.

M9.2-1 Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a+1{,}5b > 4$. Докажите, что тогда выполняется неравенство $\frac{a}{b} > 2{,}5 - b$.

Решение. Из положительности b следует, что нам нужно доказать неравенство $a > 2{,}5b - b^2$. Но, по условию, $a > 4-1{,}5b$, и требуемое неравенство следует из того, что $4-1{,}5b \geq 2{,}5b-b^2 \iff (b-2)^2 \geq 0$.

M9.2-2 Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a-1{,}5b > 4$. Докажите, что тогда выполняется неравенство $\frac{a}{b} > 5{,}5 - b$.

Решение. Из положительности b следует, что нам нужно доказать неравенство $a > 5{,}5b - b^2$. Но, по условию, $a > 4+1{,}5b$, и требуемое неравенство следует из того, что $4+1{,}5b \geq 5{,}5b-b^2 \iff (b-4)^2 \geq 0$.

Комментарий. Доказано нестрогое неравенство вместо строгого — 6 баллов.

M9.3-1 На некоторой планете между тремя городами A, B и C проложены дороги так, что каждый город с каждым связывают несколько (больше одной) дорог (движение по всем дорогам двустороннее). Назовем путями из города X в город Y все дороги, напрямую связывающие эти города, а также проезд вначале из X в третий город Z, а потом из Z в город Y. Известно, что города A и B связывают 29 путей, а города B и C — 23 пути. Сколько путей может связывать города A и C?

Ответ. 43.

Решение. Пусть между городами A и B — k дорог, между городами B и C — m дорог, между городами A и C — n дорог. Тогда количество путей из A в B равно $k + m \cdot n$, а количество путей из B в C равно $m + k \cdot n$. Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} k + m \cdot n = 29, \\ m + k \cdot n = 23, \end{cases}$$

в которой неизвестные — натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k) \cdot (n - 1) = 6$. Нам осталось перебрать варианты $n - 1 = 1, 2, 3, 6$, то есть

$n = 2,\ 3,\ 4,\ 7$. Решения находятся только при $n = 3$, $k = 5$, $m = 8$. Искомое количество путей, связывающих города A и C, есть $n + m \cdot k$, то есть $3 + 5 \cdot 8 = 43$.

M9.3-2 На некоторой планете между тремя городами A, B и C проложены дороги так, что каждый город с каждым связывают несколько (больше одной) дорог (движение по всем дорогам двустороннее). Назовем путями из города X в город Y все дороги, напрямую связывающие эти города, а также проезд вначале из X в третий город Z, а потом из Z в город Y. Известно, что города A и B связывают 39 путей, а города B и C — 29 путей. Сколько путей может связывать города A и C?

Ответ. 69.

Решение. Пусть между городами A и B — k дорог, между городами B и C — m дорог, между городами A и C — n дорог. Тогда количество путей из A в B равно $k + m \cdot n$, а количество путей из B в C равно $m + k \cdot n$. Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} k + m \cdot n = 39, \\ m + k \cdot n = 29, \end{cases}$$

в которой неизвестные — натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k) \cdot (n - 1) = 10$. Нам осталось перебрать варианты $n - 1 = 1,\ 2,\ 5,\ 10$, то есть $n = 2,\ 3,\ 6,\ 11$. Решения находятся только при $n = 3$, $k = 6$, $m = 11$. Искомое количество путей, связывающих города A и C, есть $n + m \cdot k$, то есть $3 + 6 \cdot 11 = 69$.

Комментарий. Верно составлена система — 1 балл.

Получено уравнение в целых числах и найдены возможные значения одной неизвестной — еще 2 балла.

Рассмотрены не все случаи (меньше 4) — не более 4 баллов за задачу.

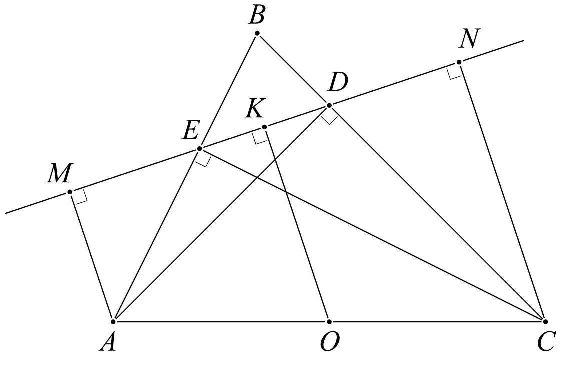
M9.4-1 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Какую *наибольшую* длину может иметь отрезок ME, если $DN = 5$?

Ответ. 5.

M9.4-2 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Какую *наибольшую* длину может иметь отрезок DN, если $ME = 10$?

Ответ. 10.

Решение. Точки D и E лежат на окружности с диаметром AC, значит, $OE = OD$, где O — середина стороны AC. Тогда $KE = KD$, где $OK \perp MN$. Значит, $OK \parallel AM \parallel CN$, то есть OK — средняя линия трапеции $CAMN$. Отсюда $MK = NK$. А так как $EK = KD$, то $ME = DN$.



Комментарий. Проведен перпендикуляр $OK \perp MN$ **и доказано**, что $KE = KD$ — 3 балла.