Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2019-2020 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

(1 задача — 9.1 или 9.2; 2 задача — 9.3 или 9.4; 3 задача — 9.5; 4 задача — 9.6)

M9.1-1 Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

Решение. Заметим, что $4a^2+4ab+4a+2b+1 = (4a^2+4a+1)+2b+4ab = (2a+1)^2+2b(2a+1) = (2a+1)(2a+2b+1)$. Так как числа a и b натуральные, каждая из скобок больше 1. Поэтому число — составное.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $4a^2+4ab+4a+2b+1 = (2a+b+1)^2-b^2$.

M9.1-2 Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $a^2+2ab+4a+4b+4$ является составным.

Решение. Заметим, что $a^2+2ab+4a+4b+4 = (a^2+4a+4)+4b+2ab = (a+2)^2+2b(a+2) = (a+2)(a+2b+2)$. Так как числа a и b натуральные, каждая из скобок больше 1. Поэтому число — составное.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $a^2+2ab+4a+4b+4 = (a+b+2)^2-b^2$.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 — 5 баллов.

M9.2 Докажите, что сумму кубов пяти последовательных натуральных чисел можно разложить в произведение трех целых чисел, каждое из которых больше 1.

Решение. Раскрыв данную сумму $(n-2)^3+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ по формулам сокращенного умножения, получим: $5n^3+30n = 5n(n^2+6)$. Каждый из трех получившихся множителей больше 1.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 — 5 баллов.

M9.3-1 Каждое из 10 последовательных натуральных чисел уменьшили на 1, и произведение этих десяти чисел уменьшилось в 3 раза. Найдите наименьшее из исходных чисел.

Ответ. 6.

Решение. Из условия следует равенство $3n(n+1)(n+2)\ldots(n+9) = (n+1)(n+2)\ldots(n+10)$, откуда $3n = n+10$.

M9.3-2 Каждое из 12 последовательных натуральных чисел уменьшили на 1, и произведение этих десяти чисел уменьшилось в 4 раза. Найдите наименьшее из исходных чисел.

Ответ. 5.

Решение. Из условия следует равенство $4n(n+1)(n+2)\ldots(n+11) = (n+1)(n+2)\ldots(n+12)$, откуда $4n = n+12$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

M9.4-1 Задумали 17 целых чисел. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждое число изменили: либо разделили его на 3, либо умножили его на 5. Могла ли сумма полученных 17 чисел равняться 175?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3 (тогда сумма станет равной 525). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525 - 125 = 400$, на 14 не делится. Противоречие.

М9.4-2 Задумали 25 целых чисел. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 150. После чего каждое число изменили: либо разделили его на 5, либо умножили его на 3. Могла ли сумма полученных 25 чисел равняться 200?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 200. Умножим каждое из полученных чисел на 5 (тогда сумма станет равной 1000). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $1000 - 150 = 850$, на 14 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.
В решении предполагается (или неявно используется), что после изменения все числа также целые — не более 2 баллов за задачу.

М9.5-1 Окружность, диаметром которой является боковая сторона AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$), касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка KL, если длины оснований трапеции равны 3 и 5.

Ответ. $LK = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.

Решение. По свойству касательных к окружности $CK = CB = 3$, $DK = DA = 5$, откуда $CK : KD = 3 : 5$. С другой стороны, из подобия треугольников CLB и ALD, $CL : LA = BC : DA = 3 : 5$. Значит, $LK \parallel AD$. Далее из подобия треугольников DLK и DBC следует $LK : BC = DK : DC = 5 : (3 + 5)$. Отсюда $LK = \dfrac{5 \cdot 3}{3 + 5} = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.

М9.5-2 Окружность, диаметром которой является боковая сторона AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$), касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка KL, если длины оснований трапеции равны 3 и 7.

Ответ. $LK = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$.

Решение. По свойству касательных к окружности $CK = CB = 3$, $DK = DA = 7$, откуда $CK : KD = 3 : 7$. С другой стороны, из подобия треугольников CLB и ALD, $CL : LA = BC : DA = 3 : 7$. Значит, $LK \parallel AD$. Далее из подобия треугольников DLK и DBC следует $LK : BC = DK : DC = 7 : (3 + 7)$. Отсюда $LK = \dfrac{7 \cdot 3}{3 + 7} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.
Доказано, что $LK \parallel AD$ — 3 балла.

М9.6 В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

Ответ. 9.

Решение. Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами.

Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо (если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней к ней стоит рыцарь. При этом ни у какой пары отмеченных клеток нет общих соседей. Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9.

Если же рыцари будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять лжецы, то условие задачи будет выполнено.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не меньше 9 — 4 балла.
Приведен пример расстановки с 9 рыцарями — 2 балла.