# 21-ая Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

# Математика

# Задания, решения, критерии оценивания

### Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

### Общие указания по проверке

**Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.**

**Максимальное число баллов за олимпиаду 28.**

**Общие принципы выставления оценки по математике:**

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5-6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждением задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2-3 балла;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

**В работе все места с ошибками должны быть отмечены!**

**M11.1-1** В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является — лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы бумаги, оказалось, что всего записей «лжец» оказалось 48, а записей «рыцарь» — 42. Сколько в комнате лжецов, если известно, что их меньше рыцарей?

*Ответ.* 4.

*Решение.* Пусть в комнате находятся $x$ человек, тогда каждый из них написал $x-1$ слово, поэтому $x(x-1)=42+48=90$, то есть $x=10$.

Пусть в комнате $y$ лжецов, тогда рыцарей — $(10-y)$. Поэтому ответов «лжец» каждый из рыцарей дал $y$ раз, а каждый из лжецов — $10-y$ раз. Имеем: $y(10-y)+(10-y)y=48 \Leftrightarrow y^2-10y+24=0 \Leftrightarrow y=4$ или $y=6$. Но лжецов — меньше, поэтому $y=4$.

**M11.1-2** В комнате находятся несколько рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждому дали листок бумаги и попросили написать про каждого из остальных, кем он является — лжецом или рыцарем. Когда собрали все листы бумаги, оказалось, что всего записей «лжец» оказалось 42, а записей «рыцарь» — 48. Сколько в комнате лжецов, если известно, что их меньше рыцарей?

*Ответ.* 3.

*Решение.* Пусть в комнате находятся $x$ человек, тогда каждый из них написал $x-1$ слово, поэтому $x(x-1)=48+42=90$, то есть $x=10$.

Пусть в комнате $y$ лжецов, тогда рыцарей — $(10-y)$. Поэтому ответов «лжец» каждый из рыцарей дал $y$ раз, а каждый из лжецов — $10-y$ раз. Имеем: $y(10-y)+(10-y)y=42 \Leftrightarrow y^2-10y+21=0 \Leftrightarrow y=3$ или $y=7$. Но лжецов — меньше, поэтому $y=3$.

*Комментарий.* Верный ответ без объяснений — 0 баллов. Верный ответ получен рассмотрением примера — 2 балла. Доказано, что в комнате 10 человек — 2 балла.

**M11.2-1** Ненулевые действительные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенствам $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$. Докажите, что число $5x^2-4y^2-z^2$ является целым.

*Решение.* Перемножив эти равенства, получим $9+3\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+2=2$ — уравнение, которое сводится к квадратному заменой $t=\frac{x}{y}$. Его корни $t=-1$, $-2$, откуда $x=-y$, и тогда $z=-y$, или $x=-2y$, и тогда $z=-4y$. В обоих случаях $5x^2-4y^2-z^2=0$, т. е. является целым числом.

**M11.2-2** Ненулевые действительные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенствам $x+3y=z$ и $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{z}$. Докажите, что число $x^2-5y^2+z^2$ является целым.

*Решение.* Перемножив эти равенства, получим $2+3\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+9=2$ — уравнение, которое сводится к квадратному заменой $t=\frac{x}{y}$. Его корни $t=-1$, $-2$, откуда $x=-y$, и тогда $z=2y$, или $x=-2y$, и тогда $z=y$. В обоих случаях $x^2-5y^2+z^2=0$, т. е. является целым числом.

*Комментарий.* Получены линейные соотношения между переменными — 5 баллов.

**M11.3-1** Докажите, что если модуль разности любых двух из трех положительных чисел $x$, $y$, $z$ меньше 3, то выполняется неравенство $\sqrt{xy+\frac{9}{4}}+\sqrt{yz+\frac{9}{4}}+\sqrt{zx+\frac{9}{4}}>x+y+z$.

*Решение.* Докажем, что $\sqrt{xy+\frac{9}{4}} > \frac{x+y}{2}$. Возведя неравенство в квадрат (обе части положительны), получим

$$xy+\frac{9}{4} > \frac{(x+y)^2}{4} \;\Leftrightarrow\; 4xy+9 > (x+y)^2 \;\Leftrightarrow\; 9 > (x-y)^2 \;\Leftrightarrow\; 3 > |x-y|.$$

Складывая неравенство $\sqrt{xy+\frac{9}{4}} > \frac{x+y}{2}$ с двумя аналогичными, получим требуемое.

**M11.3-2** Докажите, что если модуль разности любых двух из трех положительных чисел $x$, $y$, $z$ меньше 4, то выполняется неравенство $\sqrt{xy+4}+\sqrt{yz+4}+\sqrt{zx+4} > x+y+z$.

*Решение.* Докажем, что $\sqrt{xy+4} > \frac{x+y}{2}$. Возведя неравенство в квадрат (обе части положительны), получим

$$xy+4 > \frac{(x+y)^2}{4} \;\Leftrightarrow\; 4xy+16 > (x+y)^2 \;\Leftrightarrow\; 16 > (x-y)^2 \;\Leftrightarrow\; 4 > |x-y|.$$

Складывая неравенство $\sqrt{xy+4} > \frac{x+y}{2}$ с двумя аналогичными, получим требуемое.

*Комментарий.* Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

**M11.4-1** На медиане $AM$ треугольника $ABC$ выбрана точка $K$ так, что $\angle BAC + \angle BKC = 180°$. Какое *максимальное* значение может принимать разность $AB \cdot CK - AC \cdot BK$, если $AB = 5$?

*Ответ.* 0.

**M11.4-2** На медиане $AM$ треугольника $ABC$ выбрана точка $K$ так, что $\angle BAC + \angle BKC = 180°$. Какое *максимальное* значение может принимать разность $AB \cdot CK - AC \cdot BK$, если $AC = 3$?

*Ответ.* 0.

*Решение.* Докажем, что $AB \cdot CK = AC \cdot BK$. Продолжив медиану на отрезок, равный $KM$, за точку $M$, получим точку $N$. Тогда в четырехугольнике $KCNB$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, и значит он — параллелограмм. Тогда, во-первых, $\angle BAC + \angle BNC = 180°$, т. е. точки $B$, $A$, $C$, $N$ лежат на одной окружности. Во-вторых, $CK = BN$ и $BK = CN$, поэтому нам нужно доказать равенство $BA \cdot BN = CA \cdot CN$. Но из подобия треугольников $CMN$ и $AMB$ следует, что $CN : AB = CM : AM$. Аналогично, $BN : AC = BM : AM$. Теперь утверждение следует из равенства отрезков $BM$ и $CM$.

*Комментарий.* Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

*Замечание.* Решение можно завершить, используя теоремы синусов.