Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2019-2020 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

(1 задача — 11.1; 2 задача — 11.2; 3 задача — 11.3 или 11.4; 4 задача — 11.5 или 11.6)

M11.1-1 На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 — на стороне AB, 11 — на стороне BC, 12 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника ABC не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4951.

Решение. Три точки из 33 данных можно выбрать $C_{33}^3 = 5456$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника.
Итак, не подходят $C_{12}^3 + C_{11}^3 + C_{10}^3 = 220 + 165 + 120 = 505$ способов. Значит, всего есть $5456 - 505 = 4951$ треугольник.

M11.1-2 На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 — на стороне AB, 9 — на стороне BC, 10 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника ABC не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4071.

Решение. Три точки из 31 данной можно выбрать $C_{31}^3 = 4495$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника.
Итак, не подходят $C_{12}^3 + C_9^3 + C_{10}^3 = 220 + 84 + 120 = 424$ способа. Значит, всего есть $4495 - 424 = 4071$ треугольник.

Комментарий. Неарифметическая ошибка при подсчете (учтены не все случаи, двойной подсчет, неверная комбинаторная формула) — не более 2 баллов за задачу.

M11.2 Найдите все решения уравнения $\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{72}$ в натуральных числах.

Ответ. $a = 2$, $b = 9$ и $a = 4$, $b = 576$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{a^3} > \dfrac{1}{72}$, поэтому a^3 может равняться только 1, 8, 27 или 64. Для $a^3 = 8$ получаем $b = 9$, для $a^3 = 64$ получаем $b = 576$, а других решений нет.

Комментарий. Получена оценка на возможные значения числа a — 2 балла.
Потеряно одно из решений — не более 4 баллов за задачу.
Угадан только один ответ без обоснований — 1 балл.
Угаданы оба ответа без обоснований — 2 балла.

M11.3 Числа a, b, c, d, где $0 < a < c$ таковы, что каждое из уравнений $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ имеет ровно по одному решению. Сколько решений может иметь уравнение $x^2 + (c-a)x + (d-b) = 0$?

Ответ. Нет решений.

Решение. Приравняв к нулю дискриминанты первых двух квадратных уравнений, получаем: $a^2 = 4b$, $c^2 = 4d$. Тогда дискриминант третьего уравнения есть $D = (c-a)^2 - 4(d-b) = c^2 - 2ac + a^2 - c^2 + a^2 = 2a(a-c)$ — отрицательное число

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

M11.4-1 Числа x, y, z таковы, что $4x > y^2 + z^2$, $4y > x^2 + z^2$, $4z > y^2 + x^2$. Докажите, что $xyz < 8$.

Решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2 + z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $2x > yz$. Аналогично, $2y > xz$, $2z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $8xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

M11.4-2 Числа x, y, z таковы, что $6x > y^2 + z^2$, $6y > x^2 + z^2$, $6z > y^2 + x^2$. Докажите, что $xyz < 27$.

Решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2 + z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $3x > yz$. Аналогично, $3y > xz$, $3z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $27xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

Комментарий. Замечено, что числа x, y, z положительны — 0 баллов.
В решении неявно предполагается, но не упоминается, что числа x, y, z положительны — снять 1 балл.

M11.5 На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Биссектриса BL треугольника ABC пересекает отрезок A_1C_1 в точке K. Докажите, что $A_1K \cdot CL = C_1K \cdot AL$.

Решение. Треугольники AA_1B и CC_1B подобны по первому признаку ($\angle B$ — общий и $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$). Поэтому $\dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA}{BC}$. По свойству биссектрисы угла треугольника $\dfrac{A_1K}{C_1K} = \dfrac{BA_1}{BC_1}$ и $\dfrac{CL}{AL} = \dfrac{CB}{AB}$. Значит, $\dfrac{A_1K}{C_1K} = \dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AL}{CL}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Комментарий. Замечено подобие треугольников AA_1B и CC_1B — 2 балла.

M11.6 Сфера Ω касается каждого из боковых рёбер SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$, а также касается её основания в центре описанной около него окружности. Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

Решение. Пусть O — центр сферы, P — центр описанной около основания окружности, A_1, B_1, C_1 — точки касания сферы с рёбрами SA, SB, SC соответственно (см. рис.). По свойству касательных, проведенных к сфере из одной точки, имеем: $SA_1 = SB_1 = SC_1 = a$, $AA_1 = AP$, $BB_1 = BP$, $CC_1 = CP$. Но по условию $PA = PB = PC$, где R — радиус описанной около основания окружности. Значит, $SA = SB = SC = a + R$.
Пусть SH — высота пирамиды. Тогда из равных прямоугольных треугольников SAH, SBH, SCH (SH — общий катет) следует, что $HA = HB = HC$. Но это означает, что точка H — центр описанной около основания окружности, то есть H совпадает с точкой P, откуда $SP \perp ABC$. Наконец, по свойству радиуса, проведенного в точку касания, $OP \perp ABC$. Значит, прямые SP и OP совпадают, откуда и следует утверждение задачи.

Комментарий. Доказано равенство боковых ребер — 2 балла.