21-ая Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5-6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждением задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2-3 балла;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

М10.1-1 Известно, что числа $2a+b$, $2b+c$ и $2c+a$ являются членами бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии. Верно ли, что число $5a-2b$ также является членом этой прогрессии?

Ответ. Верно.

Решение. Пусть d — разность прогрессии. Заметим, что

$$5a-2b = 2(2a+b)+(2c+a)-2(2b+c) = (2c+a)+2\left((2a+b)-(2b+c)\right) = (2c+a)+2kd,$$

где k — целое. То есть число $5a-2b$ отличается от члена прогрессии $2c+a$ на целое число разностей. Значит, оно тоже является членом этой прогрессии.

М10.1-2 Известно, что числа $2a+b$, $2b+c$ и $2c+a$ являются членами бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии. Верно ли, что число $2a+4b-3c$ также является членом этой прогрессии?

Ответ. Верно.

Решение. Пусть d — разность прогрессии. Заметим, что

$$2a+4b-3c = 2(2a+b)+(2b+c)-2(2c+a) = (2b+c)+2\left((2a+b)-(2c+a)\right) = (2b+c)+2kd,$$

где k — целое. То есть число $2a+4b-3c$ отличается от члена прогрессии $2b+c$ на целое число разностей. Значит, оно тоже является членом этой прогрессии.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

М10.2-1 В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса CL, точка D лежит на стороне AC. Найдите AB, если известно, что середина биссектрисы CL является серединой отрезка DM, $AC=15$ и $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$.

Ответ. 10.

М10.2-2 В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса CL, точка D лежит на стороне AC. Найдите AB, если известно, что середина биссектрисы CL является серединой отрезка DM, $AC=10$ и $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{4}$.

Ответ. 5.

Решение. Заметим, что четырёхугольник $DLMC$ — параллелограмм. Значит, $LM\parallel DC$, $LM=DC$. Из параллельности и того, что M — середина BC, получаем, что LM — средняя линия треугольника ABC, и поэтому $AD=DC=LM$. Также заметим, что MD — средняя линия треугольника ABC. Из того, что CL — биссектриса и медиана треугольника MCD следует, что CL — высота треугольника ABC. Поэтому $AB=2AL=2AC\cos\angle BAC$.

Комментарий. Замечено, что четырёхугольник $DLMC$ — параллелограмм — 1 балл.

Доказано, что LM — средняя линия треугольника ABC — 1 балл.

Доказано, что MD — средняя линия треугольника ABC — 1 балл.

Доказано, что CL — высота треугольника ABC — 2 балла.

М10.3-1 На некоторой планете между тремя городами A, B и C проложены дороги так, что каждый город с каждым связывают несколько (больше одной) дорог (движение по всем дорогам двустороннее). Назовем путями из города X в город Y все дороги, напрямую связывающие эти города, а также проезд вначале из X в третий город Z, а потом из Z в город Y. Известно, что города A и B связывают 43 пути, а города B и C — 29 путей. Сколько путей может связывать города A и C?

Ответ. 23 или 97.

Решение. Пусть между городами A и B — k дорог, между городами B и C — m дорог, между городами A и C — n дорог. Тогда количество путей из A в B равно $k + m \cdot n$, а количество путей из B в C равно $m + k \cdot n$. Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} k + m \cdot n = 43, \\ m + k \cdot n = 29, \end{cases}$$

в которой неизвестные — натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k) \cdot (n - 1) = 14$. Нам осталось перебрать варианты $n - 1 = 1,\ 2,\ 7,\ 14$, то есть $n = 2,\ 3,\ 8,\ 15$. Решения находятся при $n = 2$, $k = 5$, $m = 19$ и при $n = 8$, $k = 3$, $m = 5$. Искомое количество путей, связывающих города A и C, есть $n + m \cdot k$, то есть $8 + 5 \cdot 3 = 23$ или $2 + 5 \cdot 19 = 97$.

M10.3-2 На некоторой планете между тремя городами A, B и C проложены дороги так, что каждый город с каждым связывают несколько (больше одной) дорог (движение по всем дорогам двустороннее). Назовем путями из города X в город Y все дороги, напрямую связывающие эти города, а также проезд вначале из X в третий город Z, а потом из Z в город Y. Известно, что города A и B связывают 60 путей, а города B и C — 45 путей. Сколько путей может связывать города A и C?

Ответ. 60, 108 или 252.

Решение. Пусть между городами A и B — k дорог, между городами B и C — m дорог, между городами A и C — n дорог. Тогда количество путей из A в B равно $k + m \cdot n$, а количество путей из B в C равно $m + k \cdot n$. Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} k + m \cdot n = 60, \\ m + k \cdot n = 45, \end{cases}$$

в которой неизвестные — натуральные числа, большие 1. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(m - k) \cdot (n - 1) = 15$. Нам осталось перебрать варианты $n - 1 = 1,\ 3,\ 5,\ 15$, то есть $n = 2,\ 4,\ 6,\ 16$. Решения находятся при $n = 2$, $k = 10$, $m = 25$, $n = 4$, $k = 8$, $m = 13$ и при $n = 6$, $k = 6$, $m = 9$. Искомое количество путей, связывающих города A и C, есть $n + m \cdot k$, то есть $2 + 10 \cdot 25 = 252$, $4 + 8 \cdot 13 = 108$ или $6 + 6 \cdot 9 = 60$.

Комментарий. Верно составлена система — 1 балл.

Получено уравнение в целых числах и найдены возможные значения одной неизвестной — еще 2 балла.

Рассмотрены не все случаи (меньше 4) — не более 4 баллов за задачу.

M10.4-1 Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $a \geq \frac{1}{7}$, $b \geq \frac{1}{7}$, $a + b \leq 2c$. Докажите, что

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{7}\right)\left(b + \frac{1}{7}\right)} + \sqrt{\left(b - \frac{1}{7}\right)\left(a + \frac{1}{7}\right)} < \sqrt{4c^2 - \frac{2}{49}}.$$

Решение. Возведя доказываемое неравенство в квадрат и приведя подобные члены, получаем:

$$2ab - \frac{2}{49} + 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{49}\right)\left(b^2 - \frac{1}{49}\right)} < 4c^2 - \frac{2}{49}.$$

Подкоренное выражение меньше $a^2 \cdot b^2$, поэтому нам достаточно проверить, что $4ab \leq 4c^2$. Последнее верно в силу неравенства $4ab \leq (a+b)^2$.

M10.4-2 Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $a \geq \dfrac{1}{9}$, $b \geq \dfrac{1}{9}$, $a + b \leq 2c$. Докажите, что

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{9}\right)\left(b + \frac{1}{9}\right)} + \sqrt{\left(b - \frac{1}{9}\right)\left(a + \frac{1}{9}\right)} < \sqrt{4c^2 - \frac{2}{81}}.$$

Решение. Возведя доказываемое неравенство в квадрат и приведя подобные члены, получаем:

$$2ab - \frac{2}{81} + 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{81}\right)\left(b^2 - \frac{1}{81}\right)} < 4c^2 - \frac{2}{81}.$$

Подкоренное выражение меньше $a^2 \cdot b^2$, поэтому нам достаточно проверить, что $4ab \leq 4c^2$. Последнее верно в силу неравенства $4ab \leq (a+b)^2$.

Комментарий. Неэквивалентные преобразования — 0 баллов за всю задачу.