Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2019-2020 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

(1 задача — 10.1 или 10.2; 2 задача — 10.3 или 10.4; 3 задача — 10.5; 4 задача — 10.6)

M10.1-1 Найдите отношение $\dfrac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac \neq 0$).

Ответ. $\dfrac{25}{4}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 4x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1+x_2 = 5x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = 4x_2^2 = \dfrac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\dfrac{b}{5a}$, и $4x_2^2 = \dfrac{c}{a} = 4\left(-\dfrac{b}{5a}\right)^2 = \dfrac{4b^2}{25a^2}$, то есть $\dfrac{c}{a} = \dfrac{4b^2}{25a^2}$. Значит, $c = \dfrac{4b^2}{25a}$. Поэтому $\dfrac{b^2}{ac} = \dfrac{25}{4}$.

M10.1-2 Найдите отношение $\dfrac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 5 раз больше другого ($ac \neq 0$).

Ответ. $\dfrac{36}{5}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 5x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1+x_2 = 6x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = 5x^2 = \dfrac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\dfrac{b}{6a}$, и $5x_2^2 = \dfrac{c}{a} = 5\left(-\dfrac{b}{6a}\right)^2 = \dfrac{5b^2}{36a^2}$, то есть $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5b^2}{36a^2}$. Значит, $c = \dfrac{5b^2}{36a}$. Поэтому $\dfrac{b^2}{ac} = \dfrac{36}{5}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 1 балл.
Верный ответ получен рассмотрением примера — 1 балл.

M10.2-1 Докажите, что существует такое натуральное n, что число $n \cdot 1000 \cdot 1002 \cdot 1004 + 4$ является точным квадратом.

Решение. В качестве n можно взять число 1002. Действительно, введя обозначение $m = 1002$, получаем, что $n \cdot 1000 \cdot 1002 \cdot 1004 + 4 = nm(m^2-4)+4$. И если взять $n = m$, то получим $m^2(m^2-4)+4 = (m^2-2)^2$.

M10.2-2 Докажите, что существует такое натуральное n, что число $n \cdot 3000 \cdot 3002 \cdot 3004 + 4$ является точным квадратом.

Решение. В качестве n можно взять число 3002. Действительно, введя обозначение $m = 3002$, получаем, что $n \cdot 3000 \cdot 3002 \cdot 3004 + 4 = nm(m^2-4)+4$. И если взять $n = m$, то получим $m^2(m^2-4)+4 = (m^2-2)^2$.

Комментарий. Число n выбрано верно, но не обосновано, что оно подходит — 2 балла.

M10.3 Найдите все решения уравнения $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{20}$ в натуральных числах.

Ответ. $a = 2$, $b = 5$ и $a = 4$, $b = 80$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{20}$, поэтому a^2 может равняться только 1, 4, 9 или 16. Для $a^2 = 4$ получаем $b = 5$, для $a^2 = 16$ получаем $b = 80$, а других решений нет.

Комментарий. Получена оценка на возможные значения числа a — 2 балла.
Потеряно одно из решений — не более 4 баллов за задачу.
Угадан только один ответ без обоснований — 1 балл.
Угаданы оба ответа без обоснований — 2 балла.

M10.4 По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй — за 7 минут, третий — за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

Ответ. 157,5 минут.

Решение. Пусть S — длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго — $S/7$, третьего — $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T\left(\frac{S}{5}-\frac{S}{7}\right)=nS$, $T\left(\frac{S}{7}-\frac{S}{9}\right)=mS$, где n, m — натуральные числа. Отсюда $\frac{n}{m}=\frac{9}{5}$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=9$. Тогда минимальное время есть $T=9\cdot\frac{7\cdot 5}{7-5}=157{,}5$ минут.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 2 балла.
Доказано, что одна из встреч произойдет через $157{,}5\cdot 2=315$ минут — 0 баллов.

Замечание. Первая встреча велосипедистов произойдет не в стартовой точке.

M10.5 В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, проведена биссектриса AL. На стороне AB выбрана точка K так, что $AK = AC$. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ALB. Докажите, что углы KCB и ABO равны.

Первое решение. Вписанный угол BAL в два раза меньше центрального угла BOL, значит, $\angle BOL = 2\angle BAL = \angle KAC$ (см. рис.). Значит, углы KAC и BOL — равные углы при вершинах равнобедренных треугольников KAC и BOL, поэтому $\angle AKC = \angle OBC$. Но угол AKC — внешний для треугольника KBC, поэтому $\angle AKC = \angle ABC + \angle KCB$, в частности $\angle OBC = \angle AKC > \angle ABC$, поэтому точка O лежит по другую сторону от AB, нежели C. С другой стороны, $\angle OBC = \angle ABC + \angle ABO$, откуда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Обозначим углы треугольника $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$; по условию, $\beta < \gamma$. Тогда $\angle ALB = \angle ACL + \angle LAC = \alpha + 2\gamma > 90^\circ$, поэтому O лежит по другую сторону от AB, нежели L, и $\angle OBA = \angle OAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 = \angle ALB - 90^\circ = (\alpha+2\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma) = \gamma-\beta$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AKC имеем $\angle ACK = \angle AKC = (180^\circ - \angle KAC)/2 = 90^\circ - \alpha = \beta+\gamma$, откуда $\angle KCB = \angle ACB - \angle ACK = 2\gamma - (\beta+\gamma) = \gamma - \beta = \angle OBA$, что и требовалось.

Комментарий. Доказано, что $\angle BOL = \angle KAC$ — 2 балла.
Замечено, что треугольники KAC и BOL равнобедренные, и доказано, что $\angle AKC = \angle OBC$ — 1 балл.
Используется, но не доказано, что O лежит по другую сторону от AB, нежели C — снять 1 балл.

M10.6-1 Известно, что $2x+3 > y^2+z^2$. Докажите, что $x+y+z > -2{,}5$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $2y+2z$. Получим:

$$2(x+y+z)+3 > y^2+2y+z^2+2z = (y+1)^2+(z+1)^2-2.$$

Поэтому

$$2(x+y+z) > (y+1)^2+(z+1)^2-5 \geq -5,$$

что и требовалось.

М10.6-2 Известно, что $4x + 2 > y^2 + z^2$. Докажите, что $x + y + z > -2{,}5$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $4y + 4z$. Получим:

$$4(x + y + z) + 2 > y^2 + 4y + z^2 + 4z = (y + 2)^2 + (z + 2)^2 - 8.$$

Поэтому

$$4(x + y + z) > (y + 2)^2 + (z + 2)^2 - 10 \geq -10,$$

что и требовалось.