

# Онлайн-олимпиада «Phystech.International» 2019-2020

## 11 класс

1. Найдите **наименьшее** натуральное число  $N$  такое, что среди чисел от  $N$  до  $\text{param1}$  (включительно) нет ни одного точного куба.

param1	Ответ
$N + 47249$	1953126
$N + 51089$	2197001
$N + 58379$	2685620
$N + 76319$	4019680
$N + 87209$	4913001

2. Дан правильный  $\text{param1}$ -угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен  $60^\circ$ . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

param1	Ответ
18	186
15	125
27	441
21	259
24	344

3. На координатной плоскости каждой точке с координатами  $(a, b)$  поставили в соответствие число  $f(a, b)$ . Оказалось, что для любых чисел  $a, b, c$  выполняются равенства:  $f(a, a) = 0, f(a, f(b, c)) = f(a, b) + c$ . Найдите  $\text{param1}$ .

param1	Ответ
$f(1110, 2025)$	-915
$f(1070, 2013)$	-943
$f(1150, 2019)$	-869
$f(1013, 2055)$	-1042
$f(1217, 2117)$	-900

4. Пусть  $AM$  – медиана треугольника  $ABC$ . На отрезке  $AM$  выбрана точка  $K$  так, что  $\angle BAC + \angle BKC = 180^\circ$ . Найдите **наименьшее** возможное значение суммы длин отрезков  $AC$  и  $BK$ , если  $\text{param1}$ .

param1	Ответ
$AB = 9, CK = 4$	12
$AB = 25, CK = 16$	40
$AB = 36, CK = 25$	60
$AB = 25, CK = 9$	30
$AB = 49, CK = 16$	56

5. Для некоторых натуральных чисел  $a$  и  $b$  выполняется неравенство  $\text{param1}$ . Найдите **наименьшее** возможное произведения  $ab$ , если каждое из этих чисел больше  $\text{param2}$ .

param1	param2	Ответ
$\sqrt{a(a+15)} + \sqrt{b(b+15)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{(a+15)(b+15)}$	100	11716
$\sqrt{a(a+14)} + \sqrt{b(b+14)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{(a+14)(b+14)}$	200	43215
$\sqrt{a(a+13)} + \sqrt{b(b+13)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{(a+13)(b+13)}$	300	94514
$\sqrt{a(a+12)} + \sqrt{b(b+12)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{(a+12)(b+12)}$	400	165613
$\sqrt{a(a+11)} + \sqrt{b(b+11)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{(a+11)(b+11)}$	500	256512

6. Квадрат  $ABCD$  и окружность расположены так, что окружность касается прямой  $BD$  в точке  $D$ , а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой  $BD$ , что и точка  $A$ . Из точки  $C$  к окружности провели касательные  $CK$  и  $CM$  ( $K, M$  – точки касания). Оказалось, что угол  $KCM = \text{param1}$ . Найдите сторону квадрата, если радиус окружности равен  $\text{param2}$ .

param1	param2	Ответ
$2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}$	$5\sqrt{2}$	5
$2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{5}}$	$4\sqrt{2}$	8
$2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{17}}$	$6\sqrt{2}$	18
$2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{13}}$	$25\sqrt{2}$	100
$2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{37}}$	$13\sqrt{2}$	65

7. Про квадратный трехчлен  $f(x)$  известно, что  $\text{param1}$  и  $\text{param2}$ . Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .

param1	param2	Ответ
$f(1) + f(2) + f(4) = 0$	$f(3) + f(-1) + f(7) = 0$	19
$f(1) + f(3) + f(5) = 0$	$f(-1) + f(4) + f(8) = 0$	23
$f(2) + f(3) + f(5) = 0$	$f(1) + f(6) + f(7) = 0$	12
$f(2) + f(3) + f(-3) = 0$	$f(1) + f(4) + f(5) = 0$	2,5
$f(2) + f(5) + f(7) = 0$	$f(1) + f(3) + f(12) = 0$	38

8. Прямоугольник  $\text{param1}$  разрезан на квадраты  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ . Суммарное количество квадратов разрезания оказалось равным  $N$ , где  $\text{param2}$ . Найдите **наименьшее** возможное значение  $N$ .

param1	param2	Ответ
--------	--------	-------

$162 \times 117$	$N > 4926$	4929
$164 \times 121$	$N > 4371$	4373
$198 \times 125$	$N > 4998$	5001
$184 \times 105$	$N > 6403$	6405
$162 \times 119$	$N > 6510$	6513

9. Найдите количество целочисленных значений параметра  $a$ , при которых один из корней уравнения  $\text{param1}$  больше 1, а другой – меньше 1.

param1	Ответ
$(a^2 + a + 1)x^2 + (3a + 1)x + 3a + 3 = 0$	6
$(a^2 + a + 1)x^2 + (-10a + 2)x - (4a + 1) = 0$	12
$(a^2 + a + 1)x^2 + (1 - 20a)x + 8a + 1 = 0$	10
$(a^2 + a + 1)x^2 + (5a + 4)x + 3a + 2 = 0$	8
$(a^2 + a + 1)x^2 + (9a + 2)x + 5a - 7 = 0$	16

10. Различные числа  $a, b, c, d$  таковы, что числа  $\log_a b, \log_c b, \log_c d, \log_a d$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите **наименьшее** возможное значение  $c$ , если  $\text{param1}$ .

param1	Ответ
$a = 5$	125
$a = 6$	216
$a = 7$	343
$a = 9$	729
$a = 10$	1000