

9 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax - 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A , B , C и D . Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 3xy = -1, \\ 9x^2y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy = 13. \end{cases}$$

3. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписана окружность Γ с центром I , которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку I , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности Γ , если $MK = 144$, $NL = 25$. Найдите AC , если дополнительно известно, что прямая MN параллельна AC .

4. На столе лежат 100 различных карточек с числами 3, 6, 9, ..., 297, 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD , касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E , так что $CE = 9$, $ED = 16$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x + 2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leq 4, \\ \frac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

9 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - 2x + a$, $f_2(x) = x^2 + bx - 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b - 6)x + 3a - 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b - 2)x - 6 + a$. Пусть разности их корней равны соответственно A , B , C и D . Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y - x - 2xy = -1, \\ 4x^2y^2 + x^2 + 4y^2 - 4xy = 61. \end{cases}$$

3. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписана окружность Γ с центром I , которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку I , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности Γ , если $MK = 225$, $NL = 64$. Найдите AC , если дополнительно известно, что прямая MN параллельна AC .

4. На столе лежат 150 различных карточек с числами 2, 4, 6, ..., 298, 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD , касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E , так что $CE = 16$, $ED = 9$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x - 5)\sqrt{ax + 2x - x^2 - 2a} \leq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 6?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x| + |4 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 4x - 2y + 2}{y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

9 класс

БИЛЕТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 2$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11, \\ 2x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$$

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P , причем $DP = 3$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L . Найдите отношение $AL : LC$.

4. Есть 306 различных карточек с числами $3, 19, 3^2, 19^2, \dots, 3^{153}, 19^{153}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

5. В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 16$, $BC = 12$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x^2 - ax - x + a)\sqrt{x + 5} \leq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq |x + y|, \\ \frac{x^2 - 6x + y^2 - 8y}{3y - x + 6} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

9 класс

БИЛЕТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{60}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 3xy = -1, \\ x^2y + 3xy^2 = -4. \end{cases}$$

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P , причем $DP = 13$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L . Найдите отношение $AL : LC$.

4. Есть 294 различные карточки с числами $7, 11, 7^2, 11^2, \dots, 7^{147}, 11^{147}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

5. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 24$, $BC = 10$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x^2 - ax + 2x - 2a)\sqrt{5 - x} \leq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 5?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y + x \geq |x - y|, \\ \frac{x^2 - 8x + y^2 + 6y}{x + 2y - 8} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.