Онлайн этап олимпиады «Физтех» 2018-2019

11 класс

1. Вычислите param1, если известно что param2.

param1	param2	Ответ
$\log_x(x^4-27x+3)$	$x^9-3x^5+9x-1=0$	
$\log_x(x^4-64x+4)$	$x^9-4x^5+16x-1=0$	
$\log_x(x^4-8x^2+2)$	$x^{10}-2x^6+4x^2-1=0$	
$\log_x(x^4-27x^2+3)$	$x^{10}-3x^6+9x^2-1=0$	
$\log_x(x^4-64x^2+4)$	$x^{10}-4x^6+16x^2-1=0$	

2. Положительные числа a и b таковы, что числа $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ и $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Известно, что param1. Найдите **наибольшее** возможное значение выражения a^2+b^2.

param1	Ответ
$a+b=6$	
$a+b=8$	
$a+b=10$	
$a+b=12$	

3. Пусть x и y – положительные числа такие, что param1. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма $x+y$?

param1	Ответ
$x^3+y^3+(x+y)^3+27xy=1458$	
$x^3+y^3+(x+y)^3+24xy=1024$	
$x^3+y^3+(x+y)^3+21xy=686$	

4. Дана парабола П: param1. Касательные к параболе П, проведенные через точки K_1 и K_2, пересекают ось соответственно в точках P_1 и P_2. Прямые, перпендикулярные этим касательным, и проходящие соответственно через точки P_1 и P_2, пересекаются в точке Q. Какую **наибольшую** площадь может иметь треугольник QP_1P_2, если расстояние между проекциями точек K_1 и K_2 на ось абсцисс равно param2?

param1	param2	Ответ
$y=2x^2$	6	
$y=2x^2$	10	
$y=4x^2$	12	
$y=4x^2$	20	
$y=4x^2$	28	

5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что для нее произведение расстояния до вершины на расстояние до стороны треугольника, противоположной этой вершине, одинаково для каждой вершины и равно param1. Окружность с диаметром AD проходит через вершины B и C. Известно, что DB = param2. Найдите длину отрезка PC.

param1	param2	Ответ
3	7	
5	6	
4	5	
6	11	
7	6	

6. Дан клетчатый прямоугольник размера param1. Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размера 1×3 и 1×4?

param1	Ответ
1×60	
1×55	
1×58	
1×59	
1×61	

7. Какой **наибольший** объем может иметь параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого диагонали A_1C_1, C_1D, BD_1, B_1C имеют в некотором порядке длины param1, param2, param3, param4? В ответ запишите квадрат объема.

param1	param2	param3	param4	ответ
5	13	17	22	
3	13	15	18	
4	11	14	18	
6	14	19	25	

8. Для каждого натурального n, не являющегося точным квадратом, вычисляются все значения переменной x, для которых оба числа $x+\sqrt{n}$ и $x^3+param1\cdot\sqrt{n}$ являются целыми. Найдите общее количество таких значений x.

param1	ответ
1524	
1372	
1228	
1092	
964	

9. В окружность вписан правильный param1-угольник, в вершинах которого записаны различные натуральные числа. Пару несоседних вершин многоугольника A и B назовем *интересной*, если хотя бы на одной из двух дуг AB во всех вершинах дуги записаны числа, большие чем числа, записанные в вершинах A и B. Какое *наименьшее* количество интересных пар вершин может быть у этого многоугольника?

param1	Ответ
55	
60	
70	
85	
95	

10. Найдите минимум param1 при условии param2.

param1	param2	Ответ
x^2+y^2-4y	$\lvert 4x-3y\rvert+5\sqrt{x^2+y^2-20y+100}=30$	
y^2+x^2+2y	$\lvert 4y-3x\rvert+5\sqrt{x^2+y^2+20y+100}=40$	
x^2+y^2+2x	$\lvert 4y+3x\rvert+5\sqrt{x^2+y^2+10x+25}=15$	
x^2+y^2-2x	$\lvert 4x+3y\rvert+5\sqrt{x^2+y^2-10x+25}=20$	