МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3-2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6-a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right) \log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - x - a$, $f_2(x) = x^2 + bx + 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b-3)x - 3a + 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b-1)x + 6 - a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 140 различных карточек с числами 4, 8, 12, …, 556, 560 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{10}{3}$, $DH = HC = \frac{1}{9}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1+x^2\right) \cdot \log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1-x^2\right)+1\right)\log_{1-x^4}\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{5}{12}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{5}{12}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2+ax+3$, $f_2(x)=x^2+2x-b$, $f_3(x)=x^2+2(a-1)x+b+6$ и $f_4(x)=x^2+(4-a)x-2b-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos y}=2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 200 различных карточек с числами 201, 203, 205, …, 597, 599 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC=5$, $DH=HC=2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\cdot\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{16}x^4}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}\right)\geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y=b$, пересекает параболу $y=\frac{4}{3}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y=\frac{4}{3}x+b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL=MN=4$, $KN=LM=9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2+2x+a$, $f_2(x)=x^2+bx-1$, $f_3(x)=2x^2+(6-b)x+3a+1$ и $f_4(x)=2x^2+(3b-2)x-a-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos y}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin y}=3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 160 различных карточек с числами 5, 10, 15, ..., 795, 800 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE=\frac{48}{7}$, $DH=HC=\frac{1}{7}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\cdot\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{81}x^4}\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\right)\geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y=b$, пересекает параболу $y=\frac{12}{5}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y=\frac{12}{5}x+b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL=MN=14$, $KN=LM=25$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \dfrac{2}{5} + \cos^2(x+y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = \dfrac{3}{5} + \sin^2(x+y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 3y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1 + 27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + 27x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y\sin 2a - x\cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y\cos 3a - x\sin 3a) \end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

   а) Найдите длину ребра AB.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{34}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2+1$ и $y=f(x)+3$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)-1$.

2. Известно, что $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin 2y}=\dfrac{1}{5}+\cos^2(x-2y)$ и $\dfrac{\cos 3x}{(1-2\cos 2x)\cos 2y}=\dfrac{4}{5}+\sin^2(x-2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x-6y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 183 различные карточки с числами $1,\ 2,\ 11,\ 2^2,\ 11^2,\ldots,2^{91},\ 11^{91}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 22?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 3. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL:LC=1:3$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-8x^5\right)+\log_{1-x^2+8x^4}\left(1+x^2\right)\leqslant 1+\log_{1-x^2+8x^4}\left(1-8x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=10(x\cos 4a+y\sin 4a),\\ x^2+y^2=10(x\sin a+y\cos a)\end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 6.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN:NA_1=1:2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

   а) Найдите длину ребра BB_1.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{26}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \dfrac{2}{3} + \cos^2(x - y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = -\dfrac{1}{3} - \sin^2(x - y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 3y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 195 различных карточек с числами $1, 5, 7, 5^2, 7^2, \ldots, 5^{97}, 7^{97}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 35?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 6,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1 + 8x^5\right) + \log_{1-3x^2+16x^4}\left(1 + x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-3x^2+16x^4}\left(1 + 8x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y\sin a - x\cos a), \\ x^2 + y^2 = 26(y\cos 2a - x\sin 2a) \end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 24.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника AA_1B и касается отрезка CC_1 в точке M.

   а) Найдите длину ребра AB.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите угол между прямой C_1C и плоскостью AA_1B, а также длину ребра A_1C_1.

© МФТИ, 2019

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x) + 1$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos 2y} = \dfrac{1}{6} + \sin^2(x + 2y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin 2y} = \dfrac{5}{6} + \cos^2(x + 2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 6y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 167 различных карточек с числами $1, 3, 11, 3^2, 11^2, \ldots, 3^{83}, 11^{83}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 33?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 8. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 5$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1 - 27x^5\right) + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1 + x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1 - 27x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(x\cos a + y\sin a), \\ x^2 + y^2 = 10(x\sin 3a + y\cos 3a) \end{cases}$$
существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 8.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN : NA_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

   а) Найдите длину ребра BB_1.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

© МФТИ, 2019