## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$, $f_2(x) = x^2 + x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (1-4a)x + 6 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (2-2a)x + 3 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно $A$, $B$, $C$ и $D$. Известно, что $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения $A$, $B$, $C$, $D$, $a$, $b$ не заданы.

2. Найдите все значения переменной $x$, при каждом из которых оба выражения $f(x) = \sqrt{21 - x^2 - 4x}$ и $g(x) = |x+2|$ определены, причём $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$.

3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\frac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\frac{144}{17}$.

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность $\Omega$ вписана в угол $BAD$, касается отрезка $BC$ в точке $C$ и повторно пересекает $CD$ в точке $E$ так, что $CE = 9$, $ED = 7$. Найдите радиус окружности $\Omega$ и площадь трапеции $ABCD$.

5. На столе лежат 140 различных карточек с числами 3, 6, 9, ... 417, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура $M$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x-1| + |5-x| \leqslant 4, \\ \frac{x^2-6x+2y+7}{y+x-4} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру $M$ и найдите её площадь.

7. Окружности $\omega$ и $\Omega$ касаются внешним образом в точке $F$, а их общая внешняя касательная касается окружностей $\omega$ и $\Omega$ соответственно в точках $A$ и $B$. Прямая $\ell$ проходит через точку $B$, вторично пересекает окружность $\Omega$ в точке $C$, а также пересекает $\omega$ в точках $D$ и $E$ (точка $D$ расположена между $C$ и $E$). Общая касательная окружностей, проходящая через точку $F$, пересекает прямые $AB$ и $BE$ в точках $P$ и $H$ соответственно (точка $H$ лежит между точками $P$ и $F$). Известно, что $BC = 60$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка $HP$ и радиусы обеих окружностей.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - x + 2a$, $f_2(x) = x^2 + 2bx + 3$, $f_3(x) = 4x^2 + (2b-3)x + 6a + 3$ и $f_4(x) = 4x^2 + (6b-1)x + 9 + 2a$. Пусть разности их корней равны соответственно $A$, $B$, $C$ и $D$. Известно, что $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения $A$, $B$, $C$, $D$, $a$, $b$ не заданы.

2. Найдите все значения переменной $x$, при каждом из которых оба выражения $f(x) = \sqrt{16 - x^2 + 6x}$ и $g(x) = |x - 3|$ определены, причём $\min(f(x); g(x)) > \frac{5-x}{2}$.

3. Известно, что отношение суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме кубов всех членов этой же прогрессии равно $\frac{1}{12}$, а отношение суммы четвёртых степеней всех членов к сумме квадратов всех членов этой прогрессии равно $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель указанной прогрессии.

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность $\Omega$ вписана в угол $BAD$, касается отрезка $BC$ в точке $C$ и повторно пересекает $CD$ в точке $E$ так, что $CE = 7$, $ED = 9$. Найдите радиус окружности $\Omega$ и площадь трапеции $ABCD$.

5. На столе лежат 210 различных карточек с числами 2, 4, 6, ... 418, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура $M$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4-y| \leqslant 4, \\ \frac{y^2+x-4y+1}{2y+x-7} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру $M$ и найдите её площадь.

7. Окружности $\omega$ и $\Omega$ касаются внешним образом в точке $F$, а их общая внешняя касательная касается окружностей $\omega$ и $\Omega$ соответственно в точках $A$ и $B$. Прямая $\ell$ проходит через точку $B$, вторично пересекает окружность $\Omega$ в точке $C$, а также пересекает $\omega$ в точках $D$ и $E$ (точка $D$ расположена между $C$ и $E$). Общая касательная окружностей, проходящая через точку $F$, пересекает прямые $AB$ и $BE$ в точках $P$ и $H$ соответственно (точка $H$ лежит между точками $P$ и $F$). Известно, что $DE = 18$, $DH = HC = 3$. Найдите длину отрезка $HP$ и радиусы обеих окружностей.

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[6]{4x^2}}{(x^2 - 4|x|)^2 - 8x^2 + 32|x| - 48} \geqslant 0.$$

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

4. В окружность $\Omega$ радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

5. Есть 200 различных карточек с числами $2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{100}, 3^{100}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура $M$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y - x \geqslant |x + y|, \\ \frac{x^2 + 8x + y^2 + 6y}{2y - x - 8} \leqslant 0. \end{cases}$$
Изобразите фигуру $M$ и найдите её площадь.

7. Хорды $AB$ и $CD$ окружности $\Gamma$ с центром $O$ имеют длину 4. Продолжения отрезков $BA$ и $CD$ соответственно за точки $A$ и $D$ пересекаются в точке $P$. Прямая $PO$ пересекает отрезок $AC$ в точке $L$, причём $AL : LC = 1 : 4$.

   а) Найдите $AP$.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности $\Gamma$ равен 3, а точка $T$ – центр окружности, вписанной в треугольник $ACP$. Найдите длину отрезка $PT$ и площадь треугольника $ACP$.

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $3\sqrt{14}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt[6]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{(x^2 - 2|x|)^2 + 4|x| - 2x^2 - 3} \leqslant 0.$$

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 10 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна 20. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

4. В окружность $\Omega$ радиуса 17 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 30$, $BC = 16$.

5. Есть 100 различных карточек с числами $2, 5, 2^2, 5^2, \ldots, 2^{50}, 5^{50}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура $M$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x + y + |x - y| \leqslant 0, \\ \frac{x^2+6x+y^2-8y}{x+3y+6} \geqslant 0. \end{cases}$$
Изобразите фигуру $M$ и найдите её площадь.

7. Хорды $AB$ и $CD$ окружности $\Gamma$ с центром $O$ имеют длину 6. Продолжения отрезков $BA$ и $CD$ соответственно за точки $A$ и $D$ пересекаются в точке $P$. Прямая $PO$ пересекает отрезок $AC$ в точке $L$, причём $AL : LC = 1 : 2$.

   а) Найдите $AP$.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности $\Gamma$ равен 4. Пусть $T$ – центр окружности, вписанной в треугольник $ACP$. Найдите длину отрезка $PT$ и площадь треугольника $ACP$.