Билет 1

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax - 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = 3x^2 + (2-2a)x - 6 - b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (4-a)x - 3 - 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2-B^2}{C^2-D^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 3.

   Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-(-b-\sqrt{T})}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{a^2+12},\ B = \sqrt{4+4b},\ C = \frac{1}{3}\sqrt{(2-2a)^2+12(6+b)},\ D = \frac{1}{3}\sqrt{(4-a)^2+12(3+2b)}$$

   Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{9}\left(\left(4a^2 - 8a + 12b + 76\right) - \left(a^2 - 8a + 24b + 52\right)\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 - 4b + 8\right)$, $A^2 - B^2 = a^2 - 4b + 8$. Значит, искомое отношение равно 3.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y - 3xy = -1, \\ 9x^2y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy = 13. \end{cases}$

   Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$, $(1; 1)$, $\left(-\frac{1}{3}; -3\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

   Решение. Переписываем систему в виде $\begin{cases} (3x - y) - 3xy = -1, \\ (3xy)^2 + (3x-y)^2 = 13 \end{cases}$, после чего вводим новые переменные: $u = 3x - y$, $v = 3xy$. Система принимает вид $\begin{cases} u - v = -1, \\ v^2 + u^2 = 13. \end{cases}$ Из первого уравнения $v = 1 + u$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $(u+1)^2 + u^2 = 13$, $u^2 + u - 6 = 0$, откуда следует, что $u = -3$ (и тогда $v = -2$) или $u = 2$ (и тогда $v = 3$).

   Если $u = -3$, $v = -2$, то $\begin{cases} 3x - y = -3, \\ 3xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 3, \\ 9x^2 + 9x + 2 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем, что либо $x = -\frac{1}{3}$, $y = 2$, либо $x = -\frac{2}{3}$, $y = 1$.

   Если $u = 2$, $v = 3$, то $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 3xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2, \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем, что либо $x = -\frac{1}{3}$, $y = -3$, либо $x = 1$, $y = 1$.

3. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$) вписана окружность Γ с центром I, которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку I, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности Γ, если $MK = 144$, $NL = 25$. Найдите AC, если дополнительно известно, что прямая MN параллельна AC.

   Ответ: $r = 60$, $AC = 390$.

   Решение. Углы KIM и LNI равны как соответственные при параллельных прямых BC и KI, поэтому прямоугольные треугольники KIM и LNI подобны. Значит, $\frac{MK}{KI} = \frac{IL}{LN}$, или (если обозначить радиус окружности за r) $\frac{144}{r} = \frac{r}{25}$, откуда $r = 60$.

   Тогда $BM = BK + KM = r + KM = 204$, $BN = BL + LN = r + LN = 85$, следовательно, $MN^2 = 204^2 + 85^2 = 17^2\left(12^2 + 5^2\right) = 17^2 \cdot 13^2$, $MN = 17 \cdot 13$. Пусть h – высота треугольника BMN, проведённая из вершины прямого угла B. Тогда площадь треугольника BMN можно выразить двумя способами: $2S_{\triangle BMN} = BN \cdot BM = MN \cdot h$, поэтому $85 \cdot 204 = 17 \cdot 13 \cdot h$, $h = \frac{1020}{13}$.

   Если $MN \parallel AC$, то треугольники BAC и BMN подобны, а коэффициент их подобия k равен отношению высот этих треугольников, проведённых из вершины B. Остаётся заметить, что высота треугольника ABC, проведённая из B, равна $r + h = 60 + \frac{1020}{13} = \frac{1800}{13}$. Отсюда $k = \frac{h+r}{h} = \frac{1800}{13} : \frac{1020}{13} = \frac{30}{17}$ и $AC = k \cdot MN = \frac{30}{17} \cdot 13 \cdot 17 = 390$.

4. На столе лежат 100 различных карточек с числами 3, 6, 9, ... 297, 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

Ответ: 990.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Следовательно, остатки от деления на 5 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 5, т.е. имеет вид $5k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $5k+3$ – и оно даёт остаток 3 от деления на 5, далее – $5k+6 = 5(k+1)+1$, дающее остаток 1 от деления на 5, затем – $5k+9 = 5(k+1)+4$, дающее остаток 4 от деления на 5, затем $5k+12 = 5(k+2)+2$, дающее остаток 4 от деления на 5; наконец, следующим является $5k+15 = 5(k+3)$, которое снова делится на 5, после чего порядок остатков повторяется. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 5 идут в порядке $\ldots 0; 3; 1; 4; 2; 0 \ldots$.

Среди данных нам 100 чисел есть по 20 чисел, дающих остатки $0, 1, 2, 3, 4$ от деления на 5.

Сумма двух чисел может делиться на 5 в следующих случаях.

1) Оба числа делятся на 5. Всего карточек с такими числами 20, и нужно выбрать 2 них – есть $C_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 = 190$ способов сделать это.

2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 5 – тогда второе должно давать остаток 4 от деления на 5. Эту пару чисел можно выбрать $20 \cdot 20 = 400$ способами.

3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 5 – тогда второе даёт остаток 3, и, аналогично второму случаю, получаем 400 способов выбрать 2 числа.

В итоге выходит 990 способов.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E, так что $CE = 9$, $ED = 16$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: $R = \frac{15}{2}$, $S_{ABCD} = \frac{675}{2}$.

Решение. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB и AD трапеции через K и W соответственно. По теореме о касательной и секущей $DW^2 = DE \cdot DC = 16 \cdot 25$, $DW = 20$. Так как C и W – точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD, отрезок CW есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDW находим, что $CW = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$. Следовательно, радиус R окружности равен $\frac{1}{2}CW = \frac{15}{2}$.

Пусть $BC = x$. Тогда $BK = x$ (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная, $AK = AB - BK = 25 - x$. Значит, $AW = AK = 25 - x$. Отсюда получаем, что сумма оснований есть $BC + AD = x + (45 - x) = 45$, и площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 45 = \frac{675}{2}$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x+2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

Ответ: $a \in [-6; -3] \cup [5; +\infty)$.

Решение. Заметим, что подкоренное выражение можно преобразовать так: $ax + 2x - x^2 - 2a = a(x-1) - x(x-1) = -(x-a)(x-1)$. ОДЗ неравенства определяется условием $(x-a)(x-1) \leqslant 0$. При $a = 1$ это условие принимает вид $(x-1)^2 \leqslant 0$, т.е. его решением является единственное число $x = 1$, а при $a \neq 1$ оно задаёт отрезок между точками a и 1 на числовой прямой. Очевидно, что первый вариант не удовлетворяет условию задачи ввиду того, что неравенство имеет не более одного решения. Можно также отметить, что для того, чтобы нашлись 2 решения на расстоянии 4 друг от друга, ОДЗ должно быть отрезком длины не меньше 4, откуда $a \leqslant -3$ или $a \geqslant 5$.

Исходное неравенство равносильно следующему:

$$(x+2)\sqrt{-(x-1)(x-a)} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Будем решать это неравенство методом интервалов, а для расстановки на числовой прямой точек, в которых множители в левой части неравенства обращаются в ноль, рассмотрим два случая.

1) $a \geqslant 5$. Тогда ОДЗ – это $x \in [1; a]$; любое значение x из этого промежутка является решением неравенства, так как первый множитель в (1) положителен, а второй – неотрицателен. Следовательно, все значения параметра $a \in [5; +\infty)$ подходят (например, решениями неравенства являются числа $x = 1$ и $x = 5$).

2) $a \leqslant -3$. Тогда ОДЗ – это $x \in [a; 1]$. Метод интервалов даёт $x \in \{a\} \cup [-2; 1]$. В этом множестве присутствуют точки на расстоянии 4 друг от друга при $-6 \leqslant a \leqslant -3$ (это точки $x = a$ и $x = a + 4$).

В итоге получаем $a \in [-6; -3] \cup [5; +\infty)$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leqslant 4, \\ \frac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

1) $y < -4$. Тогда неравенство принимает вид $-y - 4 - y \leqslant 4 \Leftrightarrow y \geqslant -4$. В этом случае решений нет.

2) $-4 \leqslant y \leqslant 0$. Тогда получаем $-y + 4 + y \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0$, что выполняется при всех значениях y из рассматриваемого промежутка.

3) $y > 0$. Тогда $y + 4 + y \leqslant 4 \Leftrightarrow y \leqslant 0$, т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что $y \in [-4; 0]$.

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой $x = 2y + 3$ (назовём её ℓ; при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при $x - y^2 - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = (y + 2)^2 - 1$. Это множество точек есть парабола с ветвями вправо и вершиной в точке $C(-1; -2)$. Точки пересечения прямой и параболы можно определить из системы уравнений $\begin{cases} x = 2y + 3, \\ x = y^2 + 4y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ y^2 + 2y = 0. \end{cases}$

Отсюда выходят две точки – $A(3; 0)$ и $C(-1; -2)$.

Второе неравенство выполняется:

– в точках параболы (кроме точек A и C);

– в точках справа от параболы и выше прямой (при этом и числитель, и знаменатель дроби положительны);

– в точках слева от параболы и ниже прямой (и числитель, и знаменатель дроби отрицательны).

Учитывая также ограничение $y \in [-4; 0]$ из первого неравенства, получаем, что множество M представляет собой совокупность двух множеств M_1 и M_2; первое из них есть криволинейный треугольник BCD, где $B(3; -4)$ и $D(-5; -4)$ – точки пересечения параболы и прямой ℓ с прямой $y = -4$ (его сторонами являются отрезки CD, BD и дуга параболы BC), а второе – область, ограниченная отрезком AC и дугой параболы AC (при этом все точки прямой AC не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой $y = -2$) следует, что площадь фигуры M_3, ограниченной отрезком BC и дугой параболы BC, равна площади M_2. Но $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$, а площадь этого треугольника несложно найти: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$.

Билет 2

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - 2x + a$, $f_2(x) = x^2 + bx - 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b-6)x + 3a - 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b-2)x - 6 + a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2-B^2}{C^2-D^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-(-b-\sqrt{T})}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{4-4a},\ B = \sqrt{b^2+8},\ C = \frac{1}{4}\sqrt{(b-6)^2 - 16(3a-2)},\ D = \frac{1}{4}\sqrt{(3b-2)^2 - 16(a-6)}$$

   Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{16}\left(\left(b^2 - 48a - 12b + 68\right) - \left(9b^2 - 16a - 12b + 100\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-b^2 - 4a - 4\right)$, $A^2 - B^2 = -b^2 - 4a - 4$. Значит, искомое отношение равно 2.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y - x - 2xy = -1, \\ 4x^2y^2 + x^2 + 4y^2 - 4xy = 61. \end{cases}$

   Ответ: $\left(-6; -\frac{1}{2}\right)$, $(1; 3)$, $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$, $\left(5; -\frac{1}{2}\right)$.

   Решение. Переписываем систему в виде $\begin{cases} (2y - x) - 2xy = -1, \\ (2xy)^2 + (2y-x)^2 = 61 \end{cases}$, после чего вводим новые переменные: $u = 2y - x$, $v = 2xy$. Система принимает вид $\begin{cases} u - v = -1, \\ v^2 + u^2 = 61. \end{cases}$ Из первого уравнения $v = 1 + u$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $(u+1)^2 + u^2 = 61$, $u^2 + u - 30 = 0$, откуда следует, что $u = -6$ (и тогда $v = -5$) или $u = 5$ (и тогда $v = 6$).

   Если $u = -6$, $v = -5$, то $\begin{cases} 2y - x = -6, \\ 2xy = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 6, \\ 4y^2 + 12y + 5 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем, что либо $y = -\frac{5}{2}$, $x = 1$, либо $y = -\frac{1}{2}$, $x = 5$.

   Если $u = 5$, $v = 6$, то $\begin{cases} 2y - x = 5, \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5, \\ 2y^2 - 5y - 3 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем, что либо $y = -\frac{1}{2}$, $x = -6$, либо $y = 3$, $x = 1$.

3. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписана окружность Γ с центром I, которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку I, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности Γ, если $MK = 225$, $NL = 64$. Найдите AC, если дополнительно известно, что прямая MN параллельна AC.

   Ответ: $R = 120$, $AC = 680$.

   Решение. Углы KIM и LNI равны как соответственные при параллельных прямых BC и KI, поэтому прямоугольные треугольники KIM и LNI подобны. Значит, $\frac{MK}{KI} = \frac{IL}{LN}$, или (если обозначить радиус окружности за r) $\frac{225}{r} = \frac{r}{64}$, откуда $r = 120$.

   Тогда $BM = BK + KM = r + KM = 345$, $BN = BL + LN = r + LN = 184$, следовательно, $MN^2 = 345^2 + 184^2 = 23^2\left(15^2 + 8^2\right) = 23^2 \cdot 17^2$, $MN = 23 \cdot 17$. Пусть h – высота треугольника BMN, проведённая из вершины прямого угла B. Тогда площадь треугольника BMN можно выразить двумя способами: $2S_{\triangle BMN} = BN \cdot BM = MN \cdot h$, поэтому $184 \cdot 345 = 17 \cdot 23 \cdot h$, $h = \frac{2760}{17}$.

   Если $MN \parallel AC$, то треугольники BAC и BMN подобны, а коэффициент их подобия k равен отношению высот этих треугольников, проведённых из вершины B. Остаётся заметить, что высота треугольника ABC, проведённая из B, равна $r + h = 120 + \frac{2760}{17} = \frac{4800}{17}$. Отсюда $k = \frac{h+r}{h} = \frac{4800}{17} : \frac{2760}{17} = \frac{40}{23}$ и $AC = k \cdot MN = \frac{40}{23} \cdot 23 \cdot 17 = 680$.

4. На столе лежат 150 различных карточек с числами 2, 4, 6, ... 298, 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

Ответ: 2235.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 5 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 5, т.е. имеет вид $5k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $5k+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 5, далее – $5k+4$, дающее остаток 4 от деления на 5, затем – $5k+6 = 5(k+1)+1$, дающее остаток 1 от деления на 5, затем $5k+8 = 5(k+1)+3$, дающее остаток 3 от деления на 5; наконец, следующим является $5k+10 = 5(k+2)$, которое снова делится на 5, после чего порядок остатков повторяется. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 5 идут в порядке $\ldots 0; 2; 4; 1; 3; 0 \ldots$.

Среди данных нам 150 чисел есть по 30 чисел, дающих остатки $0, 1, 2, 3, 4$ от деления на 5.

Сумма двух чисел может делиться на 5 в следующих случаях.

1) Оба числа делятся на 5. Всего карточек с такими числами 30, и нужно выбрать 2 них – есть $C_{30}^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 29 = 435$ способов сделать это.

2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 5 – тогда второе должно давать остаток 4 от деления на 5. Эту пару чисел можно выбрать $30 \cdot 30 = 900$ способами.

3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 5 – тогда второе даёт остаток 3, и, аналогично второму случаю, получаем 900 способов выбрать 2 числа.

В итоге выходит 990 способов.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E, так что $CE = 16$, $ED = 9$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: $R = 10, S_{ABCD} = 400$.

Решение. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB и AD трапеции через K и W соответственно. По теореме о касательной и секущей $DW^2 = DE \cdot DC = 9 \cdot 25$, $DW = 15$. Так как C и W – точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD, отрезок CW есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDW находим, что $CW = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. Следовательно, радиус R окружности равен $\frac{1}{2}CW = 10$.

Пусть $BC = x$. Тогда $BK = x$ (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная, $AK = AB - BK = 25 - x$. Значит, $AW = AK = 25 - x$. Отсюда получаем, что сумма оснований есть $BC + AD = x + (40 - x) = 40$, и площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 = 400$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x-5)\sqrt{ax + 2x - x^2 - 2a} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 6?

Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup [8; 11]$.

Решение. Заметим, что подкоренное выражение можно преобразовать так: $ax + 2x - x^2 - 2a = a(x-2) - x(x-2) = -(x-a)(x-2)$. ОДЗ неравенства определяется условием $(x-a)(x-2) \leqslant 0$. При $a = 2$ это условие принимает вид $(x-2)^2 \leqslant 0$, т.е. его решением является единственное число $x = 2$, а при $a \neq 2$ оно задаёт отрезок между точками a и 2 на числовой прямой. Очевидно, что первый вариант не удовлетворяет условию задачи ввиду того, что неравенство имеет не более одного решения. Можно также отметить, что для того, чтобы нашлись 2 решения на расстоянии 6 друг от друга, ОДЗ должно быть отрезком длины не меньше 6, откуда $a \leqslant -4$ или $a \geqslant 8$.

Исходное неравенство равносильно следующему:

$$(x-5)\sqrt{-(x-2)(x-a)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Будем решать это неравенство методом интервалов, а для расстановки на числовой прямой точек, в которых множители в левой части неравенства обращаются в ноль, рассмотрим два случая.

1) $a \leqslant -4$. Тогда ОДЗ – это $x \in [a; 2]$; любое значение x из этого промежутка является решением неравенства, так как первый множитель в (2) отрицателен, а второй – неотрицателен. Следовательно, все значения параметра $a \in (-\infty; -4]$ подходят (например, решениями неравенства являются числа $x = 2$ и $x = -4$).

2) $a \geqslant 8$. Тогда ОДЗ – это $x \in [2; a]$. Метод интервалов даёт $x \in [2; 5] \cup \{a\}$. В этом множестве присутствуют точки на расстоянии 6 друг от друга при $8 \leqslant a \leqslant 11$ (это точки $x = a$ и $x = a - 6$).

В итоге получаем $a \in (-\infty; -4] \cup [8; 11]$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x| + |4 - x| \leqslant 4, \\ \frac{x^2-4x-2y+2}{y-x+3} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

1) $x < 0$. Тогда неравенство принимает вид $-x + 4 - x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. В этом случае решений нет.

2) $0 \leqslant x \leqslant 4$. Тогда получаем $x + 4 - x \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0$, что выполняется при всех значениях x из рассматриваемого промежутка.

3) $x > 4$. Тогда $x + x - 4 \leqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что $x \in [0; 4]$.

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой $y = x - 3$ (при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$. Это множество точек есть парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $C(2; -1)$. Отметим также, что парабола пересекает ось ординат в точке $B(0; 1)$, а прямая – в точке $D(0; -3)$. Точки пересечения прямой и параболы можно определить из системы уравнений $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 - 6x + 8 = 0. \end{cases}$ Отсюда выходят две точки – $A(4; 1)$ и $C(2; -1)$.

Второе неравенство выполняется:

– в точках параболы (кроме точек A и C);

– в точках ниже параболы и выше прямой (при этом и числитель, и знаменатель дроби положительны);

– в точках выше параболы и ниже прямой (и числитель, и знаменатель дроби отрицательны).

Учитывая также ограничение $x \in [0; 4]$ из первого неравенства, получаем, что множество M представляет собой совокупность двух множеств M_1 и M_2; первое из них есть криволинейный треугольник BCD (его сторонами являются отрезки CD, BD и дуга параболы BC), а второе – область, ограниченная отрезком AC и дугой параболы AC (при этом все точки прямой AC не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой $x = 2$) следует, что площадь фигуры M_3, ограниченной отрезком BC и дугой параболы BC, равна площади M_2. Но $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$, а площадь этого треугольника несложно найти: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Выведена или указана формула для модуля разности между корнями уравнения 1 балл.

2. **(4 балла)** Выполнена замена переменных (как в решении или аналогичная ей) .... 1 балл;

   система уравнений решена относительно новых переменных .... 1 балл;

   за рассмотрение каждого из двух вариантов значений (u, v) .... по 1 баллу.

3. **(5 баллов)** Вычислен радиус окружности .... 2 балла;

   найдена гипотенуза AC треугольника .... 3 балла.

4. **(5 баллов)** Посчитано количество чисел, дающих остатки 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5 1 балл;

   найдено количество способов, когда остатки различны .... 2 балла;

   найдено количество способов, когда оба остатка одинаковы .... 2 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев (или учтены не все случаи) .. не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать.

5. **(4 балла)** Найден радиус окружности .... 2 балла;

   найдена площадь трапеции .... 2 балла.

6. **(5 баллов)** Квадратный трёхчлен под корнем разложен на множители .... 1 балл;

   построено множество решений данного неравенства на плоскости “переменная–параметр” 1 балл;

   при решении неравенства не учитывается ОДЗ .... не более 1 балла за задачу (который может быть поставлен за разложение на множители подкоренного выражения).

   Ответ отличается от верного конечным числом точек .... снять 1 балл за одну лишнюю/недостающую точку; снять 2 балла за более чем одну лишнюю/недостающую точку).

7. **(6 баллов)** Построено множество точек .... 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) .... снять 1 балл;

найдена площадь фигуры .... 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

За неполное построение множества возможны частичные баллы:

определено множество решений первого неравенства .... 1 балл;

построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль .... 1 балл;

определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству ..... 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).

Билет 9

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 2$.

   Ответ: $\sqrt{26}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 - 1 = ax + b + 1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - b = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b) = 10, \\ (a^2+1)(a^2+4b+8) = 42, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 3$, $b = -\frac{1}{8}$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b - 1 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 4} = \sqrt{6{,}5}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1| \sqrt{a^2+1} = \sqrt{6{,}5}2 = \sqrt{26}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11, \\ 2x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$

   Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$, $(1; 3)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$.

   Решение. Сделаем замену $2x + y = u$, $xy = w$. Тогда система принимает вид

   $$\begin{cases} u + 2w = 11, \\ uw = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 11 - 2w, \\ w(11 - 2w) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 11 - 2w, \\ 2w^2 - 11w + 15 = 0. \end{cases}$$

   Из второго уравнения последней системы находим, что $w = 3$ (и тогда $u = 5$) или $w = \frac{5}{2}$ (и тогда $u = 6$). Возвращаемся к исходным переменным.

   Если $u = 6$, $w = \frac{5}{2}$, то $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ xy = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x, \\ x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0. \end{cases}$ Значит, $x = \frac{5}{2}$ (при этом $y = 1$) или $x = \frac{1}{2}$ (при этом $y = 5$).

   Если $u = 5$, $w = 3$, то $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x, \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0. \end{cases}$ Значит, $x = \frac{3}{2}$ (при этом $y = 2$) или $x = 1$ (при этом $y = 3$).

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP = 3$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL : LC$.

   Ответ: $AL : LC = 3 : 13$.

   Решение. Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно; отсюда следует, что $AN = DH$ и поэтому $AP = DP = 3$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, получаем, что $\frac{AL}{LC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PA}{PD+DC} = \frac{3}{13}$.

4. Есть 306 различных карточек с числами $3, 19, 3^2, 19^2, \ldots, 3^{153}, 19^{153}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

Ответ: 17 328.

Решение. Чтобы получить квадрат натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в чётной степени.

Допустим, выбраны две карточки со степенями тройки. У нас есть 76 чётных показателей $(2, 4, 6, \ldots, 152)$ и 77 нечётных показателей $(1, 3, 5, \ldots, 153)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась чётной. Чтобы сумма двух натуральных чисел оказалась чётной, мы можем либо выбрать два чётных числа $\left(C_{76}^2 = \frac{76 \cdot 75}{2} = 2850 \text{ способов}\right)$, либо два нечётных числа $\left(C_{77}^2 = \frac{77 \cdot 76}{2} = 2926 \text{ способов}\right)$. Получаем $2850 + 2926 = 5776$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени числа 19, точно такое же, т.е. 5776.

Если взята одна карточка со степенью тройки и одна карточка со степенью числа 19, то оба показателя должны быть чётными – получаем $76 \cdot 76 = 5776$ способов.

Итого: $5776 \cdot 3 = 17\,328$ способов.

5. В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 16$, $BC = 12$.

Ответ: $\frac{49}{50}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 6$, $AN = ND = 8$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 6$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 8$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 2$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $DH = \frac{AD+BC}{2} = 14$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ параллельны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 20$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\psi = 100 \sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin\psi = 200 \sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{100 \sin\psi}{200 \sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 14$. Аналогично первому случаю находим, что $DH = 14$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 14\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\varphi = 196 \sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin\varphi = 200 \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{196 \sin\varphi}{200 \sin\varphi} = \frac{49}{50}$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\left(x^2 - ax - x + a\right)\sqrt{x+5} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

Ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $x \geqslant -5$. Раскладывая квадратный трёхчлен в скобках на множители (например, методом группировки), получаем $(x-1)(x-a)\sqrt{x+5} \leqslant 0$. Будем решать это неравенство методом интервалов. Для того, чтобы расположить точки, в которых левая часть неравенства обращается в ноль, на числовой прямой, необходимо рассмотреть несколько случаев.

1) $a < -5$. Тогда множитель $(x-a)$ положителен на ОДЗ, и его можно не рассматривать. Получаем $(x-1)\sqrt{x+5} \leqslant 0$, $x \in [-5; 1]$. Очевидно, на этом промежутке есть точки, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга (например, $x = -4$ и $x = 0$). Все значения $a < -5$ удовлетворяют условию задачи.

2) $a = -5$. Неравенство принимает вид $(x-1)(x+5)\sqrt{x+5} \leqslant 0$, что равносильно неравенству, полученному в предыдущем случае. Значит, $a = -5$ подходит.

3) $-5 < a < 1$. Тогда получаем $x \in \{-5\} \cup [a; 1]$. Если $a \leqslant -1$, то в этом множестве есть точки на расстоянии 4 друг от друга ($x = -1$ и $x = -5$); если $a > -1$, то таких точек нет. Значит, в этом случае подходят значения $a \in (-5; -1]$.

4) $a = 1$. Неравенство принимает вид $(x-1)^2\sqrt{x+5} \leqslant 0$ и выполняется только при $x = -5$ и $x = 1$. Этот случай не подходит.

5) $a > 1$. Тогда $x \in \{-5\} \cup [1; a]$, и решения на расстоянии, равном 4, есть при $a \geqslant 5$.

Объединяя результаты всех рассмотренных случаев, получаем $a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geqslant |x+y|, \\ \frac{x^2-6x+y^2-8y}{3y-x+6} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 3.

Решение. Первое неравенство равносильно[1] системе $\begin{cases} x+y \leqslant x-y, \\ x+y \geqslant y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x-3)^2+(y-4)^2-25}{3y-x+6} \geqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(3; 4)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = -2 + \frac{x}{3}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 3y+6, \\ x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+6, \\ (3y+6)^2 - 6(3y+6) + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+6, \\ y^2 + y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(3; -1)$ и $B(6; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; -2)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель и знаменатель отрицательны);

– вне окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель и знаменатель положительны).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося снизу от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный ниже хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному ниже хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

[1] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

Билет 10

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x)+1$ равно $\sqrt{60}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

Ответ: $2\sqrt{11}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 - 2 = ax + b + 1$.

Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - b = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2 + 1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b + 12)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b\right)=12,\\ \left(a^2+1\right)\left(a^2+4b+12\right)=60,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 3$, $b = 0$.

Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b - 2 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 8} = \sqrt{11}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{11}\cdot 2 = 2\sqrt{11}$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+3y+3xy=-1,\\ x^2y+3xy^2=-4.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$, $(-1;-1)$, $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$, $\left(4;-\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Сделаем замену $x + 3y = u$, $xy = w$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+3w=-1,\\ uw=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=-1-3w,\\ -w(1+3w)=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=-1-3w,\\ 3w^2+w-4=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы находим, что $w = 1$ (и тогда $u = -4$) или $w = -\frac{4}{3}$ (и тогда $u = 3$). Возвращаемся к исходным переменным.

Если $u = 3$, $w = -\frac{4}{3}$, то $\begin{cases}x+3y=3,\\ xy=-\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-3y,\\ y^2-y-\frac{4}{9}=0.\end{cases}$ Значит, $y = \frac{4}{3}$ (при этом $x = -1$) или $y = -\frac{1}{3}$ (при этом $x = 4$).

Если $u = -4$, $w = 1$, то $\begin{cases}x+3y=-4,\\ xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4-3y,\\ 3y^2+4y+1=0.\end{cases}$ Значит, $y = -\frac{1}{3}$ (при этом $x = -3$) или $y = -1$ (при этом $x = -1$).

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP = 13$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL : LC$.

Ответ: $AL : LC = 13 : 18$.

Решение. Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно; отсюда следует, что $AN = DH$ и поэтому $AP = DP = 13$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, получаем, что $\frac{AL}{LC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PA}{PD+DC} = \frac{13}{18}$.

4. Есть 294 различные карточки с числами $7,\ 11,\ 7^2,\ 11^2, \ldots, 7^{147},\ 11^{147}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

Ответ: $15\,987$.

Решение. Чтобы получить квадрат натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в чётной степени.

Допустим, выбраны две карточки со степенями семёрки. У нас есть 73 чётных показателя $(2, 4, 6, \ldots, 146)$ и 74 нечётных показателя $(1, 3, 5, \ldots, 147)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась чётной. Чтобы сумма двух натуральных чисел оказалась чётной, мы можем либо выбрать два чётных числа $\left(C_{73}^2 = \frac{73\cdot 72}{2} = 2628\text{ способов}\right)$, либо два нечётных числа $\left(C_{74}^2 = \frac{74\cdot 73}{2} = 2701\text{ способов}\right)$. Получаем $2628 + 2701 = 5329$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени числа 11, точно такое же, т.е. 5329.

Если взята одна карточка со степенью семёрки и одна карточка со степенью числа 11, то оба показателя должны быть чётными – получаем $73 \cdot 73 = 5329$ способов.

Итого: $5329 \cdot 3 = 15\,987$ способов.

5. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 24$, $BC = 10$.

Ответ: $\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 5$, $AN = ND = 12$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 5$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 12$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $DH = \frac{AD+BC}{2} = 17$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ параллельны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 26$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = 169\sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 26\sin\psi = 338\sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{169\sin\psi}{338\sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 17$. Аналогично первому случаю находим, что $DH = 17$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 17\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi = 289\sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 26\sin\varphi = 338\sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{289\sin\varphi}{338\sin\varphi} = \frac{289}{338}$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\left(x^2 - ax + 2x - 2a\right)\sqrt{5-x} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 5?

Ответ: $a \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $x \leqslant 5$. Раскладывая квадратный трёхчлен в скобках на множители (например, методом группировки), получаем $(x+2)(x-a)\sqrt{5-x} \leqslant 0$. Будем решать это неравенство методом интервалов. Для того, чтобы расположить точки, в которых левая часть неравенства обращается в ноль, на числовой прямой, необходимо рассмотреть несколько случаев.

1) $a > 5$. Тогда множитель $(x-a)$ отрицателен на ОДЗ, и его можно отбросить, поменяв знак неравенства. Получаем $(x+2)\sqrt{5-x} \geqslant 0$, $x \in [-2; 5]$. Очевидно, на этом промежутке есть точки, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга (например, $x = -4$ и $x = 0$). Все значения $a < -5$ удовлетворяют условию задачи.

2) $a=5$. Неравенство принимает вид $(x+2)(x-5)\sqrt{5-x}\leqslant 0$, что равносильно неравенству, полученному в предыдущем случае. Значит, $a=5$ подходит.

3) $-2<a<5$. Тогда получаем $x\in[-2;a]\cup\{5\}$. Если $a\geqslant 0$, то в этом множестве есть точки на расстоянии 4 друг от друга ($x=0$ и $x=5$); если $a<0$, то таких точек нет. Значит, в этом случае подходят значения $a\in[0;5)$.

4) $a=-2$. Неравенство принимает вид $(x+2)^2\sqrt{5-x}\leqslant 0$ и выполняется только при $x=-2$ и $x=5$. Этот случай не подходит.

5) $a<-2$. Тогда $x\in[a;-2]\cup\{5\}$, и решения на расстоянии, равном 5, есть при $a\leqslant -7$.

Объединяя результаты всех рассмотренных случаев, получаем $a\in(-\infty;-7]\cup[0;+\infty)$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y+x\geqslant |x-y|, \\ \frac{x^2-8x+y^2+6y}{x+2y-8}\leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 8.

Решение. Первое неравенство равносильно[2] системе $\begin{cases} x-y\leqslant x+y, \\ x-y\geqslant -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x-4)^2+(y+3)^2-25}{x+2y-8}\leqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(4;-3)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y=4-\frac{x}{2}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x=8-2y, \\ x^2-8x+y^2+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-2y, \\ (8-2y)^2-8(8-2y)+y^2+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-2y, \\ y^2-2y=0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(4;2)$ и $B(8;0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0;4)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– вне окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося сверху от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный выше хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному выше хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$.

[2] $|A|\leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A\leqslant B, \\ A\geqslant -B. \end{cases}$

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов .... 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты .... 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс .... 0 баллов за задачу.

2. **(4 балла)** Выполнена замена переменных (как в решении или аналогичная ей) .... 1 балл;

   система уравнений решена относительно новых переменных .... 1 балл;

   за рассмотрение каждого из двух вариантов значений (u, w) .... по 1 баллу.

3. **(3 балла)** Доказано, что треугольник BCP равнобедренный .... 1 балл;

   доказано, что PL – биссектриса угла APC .... 1 балл.

4. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на карточках степени разных простых чисел 2 балла;

   найдено количество способов, когда на карточках степени одного простого числа .....3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза .... не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт (например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай.

5. **(5 баллов)** Полностью рассмотрен только один из двух возможных случаев .... 3 балла;

   промежуточные оценки в случае отсутствия полного решения (ставятся только один раз, даже если вычисления проведены верно в обоих случаях):

   – найдена площадь трапеции .... 1 балл;

   – найден угол между диагоналями прямоугольника .... 1 балл.

6. **(5 баллов)** Квадратный трёхчлен в скобках разложен на множители .... 1 балл;

   построено множество решений данного неравенства на плоскости "переменная–параметр" 1 балл;

   при решении неравенства не учитывается ОДЗ .... не более 1 балла за задачу (который может быть поставлен за разложение на множители квадратного трёхчлена в скобках).

   Ответ отличается от верного конечным числом точек .... снять 1 балл за одну лишнюю/недостающую точку; снять 2 балла за более чем одну лишнюю/недостающую точку).

7. **(6 баллов)** Построено множество точек .... 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) .... снять 1 балл;

   найдена площадь фигуры .... 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

   За неполное построение множества возможны частичные баллы:

   определено множество решений первого неравенства .... 1 балл;

   построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль .... 1 балл;

   определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству ..... 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).