

# Онлайн этап олимпиады «Физтех» 2018-2019

## 11 класс

1. Вычислите param1, если известно что param2.

param1	param2	Ответ
$\log_x(x^4 - 27x + 3)$	$x^9 - 3x^5 + 9x - 1 = 0$	13
$\log_x(x^4 - 64x + 4)$	$x^9 - 4x^5 + 16x - 1 = 0$	13
$\log_x(x^4 - 8x^2 + 2)$	$x^{10} - 2x^6 + 4x^2 - 1 = 0$	14
$\log_x(x^4 - 27x^2 + 3)$	$x^{10} - 3x^6 + 9x^2 - 1 = 0$	14
$\log_x(x^4 - 64x^2 + 4)$	$x^{10} - 4x^6 + 16x^2 - 1 = 0$	14

2. Положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что числа  $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ ,  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$  и  $\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3}$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Известно, что param1. Найдите **наибольшее** возможное значение выражения  $a^2 + b^2$ .

param1	Ответ
$a + b = 6$	18
$a + b = 8$	32
$a + b = 10$	50
$a + b = 12$	72

3. Пусть  $x$  и  $y$  – положительные числа такие, что param1. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма  $x + y$ ?

param1	Ответ
$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$	10
$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 27xy = 1458$	9
$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 24xy = 1024$	8
$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 21xy = 686$	7

4. Дана парабола  $\Pi$ : param1. Касательные к параболе  $\Pi$ , проведенные через точки  $K_1$  и  $K_2$ , пересекают ось соответственно в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Прямые, перпендикулярные этим касательным, и проходящие соответственно через точки  $P_1$  и  $P_2$ , пересекаются в точке  $Q$ . Какую **наибольшую** площадь может иметь треугольник  $QP_1P_2$ , если расстояние между проекциями точек  $K_1$  и  $K_2$  на ось абсцисс равно param2?

param1	param2	Ответ
$y = 2x^2$	6	0,1875
$y = 2x^2$	10	0,3125
$y = 4x^2$	12	0,1875
$y = 4x^2$	20	0,3125
$y = 4x^2$	28	0,4375

5. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $P$  так, что для нее произведение расстояния до вершины на расстояние до стороны треугольника, противоположной этой вершине, одинаково для каждой вершины и равно  $param1$ . Окружность с диаметром  $AD$  проходит через вершины  $B$  и  $C$ . Известно, что  $DB = param2$ . Найдите длину отрезка  $PC$ .

param1	param2	Ответ
3	7	7
5	6	6
4	5	5
6	11	11
7	6	6

6. Дан клетчатый прямоугольник размера  $param1$ . Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размера  $1 \times 3$  и  $1 \times 4$ ?

param1	Ответ
$1 \times 60$	45665
$1 \times 55$	16855
$1 \times 58$	30640
$1 \times 59$	37432
$1 \times 61$	55728

7. Какой **наибольший** объем может иметь параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого диагонали  $A_1 C_1$ ,  $C_1 D$ ,  $BD_1$ ,  $B_1 C$  имеют в некотором порядке длины  $param1$ ,  $param2$ ,  $param3$ ,  $param4$ ? В ответ запишите квадрат объема.

param1	param2	param3	param4	ответ
5	13	17	22	135200
3	13	15	18	36800
4	11	14	18	42140
6	14	19	25	278400

8. Для каждого натурального  $n$ , не являющегося точным квадратом, вычисляются все значения переменной  $x$ , для которых оба числа  $x + \sqrt{n}$  и  $x^3 + param1 \cdot \sqrt{n}$  являются целыми. Найдите общее количество таких значений  $x$ .

param1	ответ
1524	39
1372	33
1228	35
1092	27
964	29

9. В окружность вписан правильный  $param1$ -угольник, в вершинах которого записаны различные натуральные числа. Пару несоседних вершин многоугольника  $A$  и  $B$  назовем *интересной*, если хотя бы на одной из двух дуг  $AB$  во всех вершинах дуги записаны числа, большие чем числа, записанные в вершинах  $A$  и  $B$ . Какое *наименьшее* количество интересных пар вершин может быть у этого многоугольника?

param1	Ответ
55	52
60	57
70	67
85	82
95	92

**10.** Найдите минимум param1 при условии param2.

param1	param2	Ответ
$x^2 + y^2 - 4y$	$ 4x - 3y  + 5\sqrt{x^2 + y^2 - 20y + 100} = 30$	36,96
$y^2 + x^2 + 2y$	$ 4y - 3x  + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 20y + 100} = 40$	28,16
$x^2 + y^2 + 2x$	$ 4y + 3x  + 5\sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 25} = 15$	9,24
$x^2 + y^2 - 2x$	$ 4x + 3y  + 5\sqrt{x^2 + y^2 - 10x + 25} = 20$	4,76