# Онлайн этап олимпиады Phystech.International

## 11 класс

**1.** Найдите сумму корней уравнения param1.

| param1 | Ответ |
|---|---|
| $\log_3(9^{x+0,5}+54)-\log_3(2018-3^{x+1,5})=x-0,5$ | 2 |
| $\log_3(9^{x+0,5}+243)-\log_3(2(2018-3^{x-0,5}))=x+1,5$ | 3 |
| $\log_3(9^{x+1}+243)-\log_3(2(2018+3^{x+1,5}))=x-0,5$ | 4 |
| $\log_2(4^{x+1,5}+96)-\log_2(2018+2^{x-0,5})=x+1,5$ | 4 |
| $\log_2(4^{x+2,5}+240)-\log_2(2018+2^{x+1,5})=x-0,5$ | 3 |

**2.** Найдите **наибольшее возможное значение** корня уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что param1 и $a \neq c$ (сами числа $a$, $b$, $c$, $d$ не даны).

| param1 | Ответ |
|---|---|
| $a+d=b+c=1100$ | 550 |
| $a+d=b+c=700$ | 350 |
| $a+d=b+c=1300$ | 650 |
| $a+d=b+c=850$ | 425 |
| $a+d=b+c=1250$ | 625 |

**3.** Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, у которой param1. Найдите $n$, если известно, что param2.

| param1 | param2 | Ответ |
|---|---|---|
| $a_1=3,\ a_n=20$ | $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=7$ | 421 |
| $a_1=5,\ a_n=10$ | $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=11$ | 551 |
| $a_1=12,\ a_n=2$ | $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=20$ | 481 |
| $a_1=1,\ a_n=25$ | $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=10$ | 251 |
| $a_1=15,\ a_n=4$ | $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=11$ | 661 |

**4.** Окружность $\Gamma$, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AB$ в точке $K$, а стороны $AC$ – в точке $T$. На меньшей дуге $TK$ окружности $\Gamma$ выбрана точка $P$. Прямая, проходящая через точку $K$ параллельно прямой $AP$, вторично пересекает окружность $\Gamma$ в точке $N$. Найдите $PK$, если известно, что $AP$ = param1, $KN$ = param2.

| param1 | param2 | Ответ |
|---|---|---|
| 4 | 25 | 10 |
| 6 | 24 | 12 |
| 4 | 9 | 6 |
| 25 | 4 | 10 |
| 8 | 2 | 4 |

**5.** На основании *AD* трапеции *ABCD* выбрали точку *K*. Оказалось, что *AB*=*BK* и *KC*=*CD*. Известно, что отношение площадей треугольников *ABK* и *KCD* равно param1, а радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABK* и *KCD*, равны соответственно param2 и param3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *KBC*.

| param1 | param2 | param3 | ответ |
|---|---|---|---|
| 3,5 | 7 | 4 | 6 |
| 13/3 | 13 | 9 | 12 |
| 5 | 5 | 2 | 4 |
| 3 | 9 | 6 | 8 |

**6.** Найдите сумму корней уравнения param1, лежащих на интервале param2.

| param1 | param2 | Ответ |
|---|---|---|
| $\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)-2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)=1$ | $(9;12)$ | 30 |
| $\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)-\sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)+6\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)=1$ | $(15;18)$ | 48 |
| $\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)+6\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)=1$ | $(9;12)$ | 33 |
| $\sin^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)-\sqrt{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)-2\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi x}{3}\right)=1$ | $(15;18)$ | 51 |

**7.** Взяли натуральные числа param1 и написали эти param2 вдоль верхней стороны таблицы param3 (по одному числу над каждым столбцом), и эти же param2 записали вдоль левой стороны таблицы (по одному числу слева от каждой строки). В клетки таблицы записали произведения соответствующих чисел («таблица умножения»). Какое количество произведений в этой таблице делится на 6?

| param1 | param2 | param3 | Ответ |
|---|---|---|---|
| от 15 до 84 | 70 чисел | 70×70 | 2088 |
| от 13 до 75 | 63 числа | 63×63 | 1622 |
| от 11 до 80 | 70 чисел | 70×70 | 2042 |
| от 18 до 85 | 68 чисел | 68×68 | 1972 |
| от 10 до 78 | 69 чисел | 69×69 | 2018 |

**8.** По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т.е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые десять команд выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми десятью командами, на param1 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Какое **наибольшее** количество команд могло участвовать в таком турнире? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение – 0; ничьих в волейболе не бывает.)

| param1 | Ответ |
|---|---|
| 100 | 21 |
| 99 | 22 |
| 97 | 23 |
| 85 | 26 |

**9.** Найдите param1, если param2 для всех действительных $x$, и param3.

| param1 | param2 | param3 | Ответ |
|---|---|---|---|
| $f(250)$ | $f(x+3)=f(x)+x^2+x-7$ | $f(1)=1$ | 1714698 |
| $f(400)$ | $f(x+3)=f(x)+x^2-x+3$ | $f(1)=2$ | 7005245 |
| $f(430)$ | $f(x+3)=f(x)+x^2+2x+1$ | $f(1)=15$ | 8803238 |
| $f(310)$ | $f(x+3)=f(x)-x^2+x-5$ | $f(1)=3$ | –3246866 |
| $f(370)$ | $f(x+3)=f(x)-x^2-x+11$ | $f(1)=-5$ | –5581130 |

**10.** В клетки прямоугольной доски param1 поставили фишки. Оказалось, что для любой фишки либо в столбце, либо в строке, где эта фишка стоит, больше фишек нет. Какое **наибольшее** количество фишек может стоять на доске?

| param1 | Ответ |
|---|---|
| 20×50 | 68 |
| 25×60 | 83 |
| 30×75 | 103 |
| 55×35 | 88 |
| 70×45 | 113 |