Билет 5

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3-2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6-a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-\left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{a^2-8},\ B = \sqrt{9-4b},\ C = \frac{1}{3}\sqrt{(3-2a)^2 - 12(4+b)},\ D = \frac{1}{3}\sqrt{(6-a)^2 - 12(2+b)}$$

Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{9}\left((4a^2 - 12a - 12b - 39) - (a^2 - 12a - 24b + 12)\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + 4b - 17\right)$, $A^2 - B^2 = a^2 + 4b - 17$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{3}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

Ответ: -1, $\frac{12}{35}$ или $-\frac{12}{35}$.

Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = -2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = -2 \sin y \cos y \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда следует, что либо $x + y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $x - y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первом случае получаем, что $x + y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = -1$.

Во втором случае $x = y + \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части второго уравнения: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos(y + \pi k) = \sqrt{2}(\cos y \cos \pi k - \sin y \sin \pi k) = (-1)^k\sqrt{2}\cos y.$$

Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^k\sqrt{2} = -6\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения $\pm\frac{1}{6}$. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot\left(\pm\frac{1}{6}\right)}{1-\frac{1}{36}} = \pm\frac{12}{35}$.

Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos y} = -6\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y + \pi k\right)}{\cos y} = -6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^k \operatorname{tg} y = -6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, у первого уравнения есть решения (тангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^k\sqrt{2} = -6\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{6}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, …, 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 119 282.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+4$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+6$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 44, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{502; 508; 514; \ldots; 760\}$), 43 числа, делящихся на 3 ($B = \{504; 510; 516; \ldots; 756\}$), 43 числа, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{506; 512; 518; \ldots; 758\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{44}^3 способов выбрать 3 числа из множества A и по C_{43}^3 способов выбрать 3 числа из множеств B и C. В сумме получаем $\frac{44\cdot43\cdot42}{6} + 2\cdot\frac{43\cdot42\cdot41}{6} = 13\,244 + 2\cdot 12\,341 = 37\,926$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $44\cdot43\cdot43 = 81\,356$ способов.

В сумме выходит 119 282 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = 7\sqrt{46}$, $r = 5\sqrt{\frac{138}{7}}$, $R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC\cdot HB = 4\cdot 46 \Rightarrow HF = 2\sqrt{46};$$
$$HF^2 = HD\cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 46;$$
$$BA^2 = BD\cdot BE = 50\cdot 92 \Rightarrow BA = 10\sqrt{46}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = 5\sqrt{46}$. Итак, $PH = PF + FH = 7\sqrt{46}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $46^2 = 7^2\cdot 46 + 5^2\cdot 46 - 70\cdot 46\cos\gamma$, откуда $46 = 49 + 25 - 70\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{2}{5}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 10\sqrt{46}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 10\sqrt{46}$, $OH = R-r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(10\sqrt{46}\right)^2$; кроме того, $\frac{2}{5} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{7}{3}r$, а из первого следует, что $Rr = 25 \cdot 46$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = \frac{5\sqrt{322}}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{5\sqrt{138}}{\sqrt{7}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{5}{6}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-4x^2>0 \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2},\\
1-4x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
1+4x^2>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
1+4x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
\tfrac{3x^2}{2}-\tfrac{4x}{3}+\tfrac{5}{6}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
\tfrac{3x^2}{2}-\tfrac{4x}{3}+\tfrac{5}{6}\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\frac{1}{9},\\ x\neq 1.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{9}$.

Обозначим $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} = u$, $1 + 4x^2 = v$, $1 - 4x^2 = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$\left(\log_u v\cdot\log_u w+1\right)\log_{vw} u\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{\left(\log_u v-1\right)\left(\log_u w-1\right)}{\log_u vw}\geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{5x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{11x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(-16x^4\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{\left(15x^2+8x+1\right)\left(33x^2-8x-1\right)}{x^2\left(9x^2-8x-1\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(5x+1)(3x+1)(3x-1)(11x+1)}{x^2(x-1)(9x+1)}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\tfrac{1}{3}\right]\cup\left[-\tfrac{1}{5};-\tfrac{1}{9}\right)\cup\left[-\tfrac{1}{11};0\right)\cup\left(0;\tfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{25}{12}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{3}{4}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{4}{5}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{5}{4}AH = -\frac{5x_1}{4}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{5x_2}{4}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[1] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{5x_1}{4} \cdot \frac{5x_2}{4}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{3}{4}x + b$ и параболы $y = \frac{3}{4}x^2$ определяются уравнением $\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{4b}{3} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{4b}{3}$. Значит, $b^2 = -\frac{25}{16} \cdot \left(-\frac{4b}{3}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{25b}{12}$, откуда $b = \frac{25}{12}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{3}{4}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{6}$; б) $CQ = \frac{52}{3}$.

Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

[1] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 18$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{18}{\ell}$, $XP = \frac{18\sqrt{3}a}{\ell} = 18\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{18}{\ell}$, $YP = \frac{18\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 18\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $XO_1 = \frac{1}{2}KL = 1$, $YO_1 = XY - XO_1 = 17$. Отсюда $17^2 - 1^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 18^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $16 \cdot 18 = 18^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{1}{6}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{1}{6}$.

Итак, $\ell = 6a$, и из подобия имеем

$$\frac{2}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{18}{\ell} = 1 - \frac{3}{a},$$

откуда $a = 4$ и $\ell = 24$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{1}{18}$. Значит, $CH = \frac{SC}{18} = \frac{4}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 16$. Отсюда $CQ = CH + HQ = \frac{52}{3}$.

Билет 6

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - x - a$, $f_2(x) = x^2 + bx + 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b-3)x - 3a + 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b-1)x + 6 - a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left| \frac{-b+\sqrt{T} - \left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a} \right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{1+4a},\ B = \sqrt{b^2-8},\ C = \frac{1}{4}\sqrt{(b-3)^2 + 16(3a-2)},\ D = \frac{1}{4}\sqrt{(3b-1)^2 + 16(a-6)}$$

Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{16}\left((b^2 - 6b + 48a - 23) - (9b^2 - 6b + 16a - 95)\right) = \frac{1}{2}\left(9 + 4a - b^2\right)$, $A^2 - B^2 = 9 + 4a - b^2$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

Ответ: -1, $\frac{20}{21}$ или $-\frac{20}{21}$.

Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = -2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = -2\sin y \cos y \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда следует, что либо $x + y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $x - y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первом случае получаем, что $x + y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = -1$.

Во втором случае $x = y + \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части первого уравнения: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\sqrt{2}\sin(y + \pi k) = -\sqrt{2}(\sin y \cos \pi k + \cos y \sin \pi k) = (-1)^{k+1}\sqrt{2}\sin y.$$

Первое уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения $\pm\frac{5}{2}$. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot\left(\pm\frac{5}{2}\right)}{1 - \frac{25}{4}} = \mp\frac{20}{21}$.

Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin y} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos(\pi - y + \pi k)}{\sin y} = \frac{2}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^{k+1}\operatorname{ctg} y = \frac{2}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, у первого уравнения есть решения (котангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

Во втором случае подставим x не только в левую часть первого уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{5(-1)^{k+1}}{2}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 140 различных карточек с числами 4, 8, 12, ..., 556, 560 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 149 224.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+4 = 3(k+1)+1$ – и оно даёт остаток 1 от деления на 3, далее идёт $3k+8 = 3(k+2)+2$, дающее остаток 2 от деления на 3, а затем – $3k+12$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 1; 2; 0; 1; 2; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 47, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{4; 16; 28; \ldots; 556\}$), 46 чисел, делящихся на 3 ($B = \{12; 24; 36; \ldots; 552\}$), 47 чисел, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{8; 20; 32; \ldots; 560\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{46}^3 способов выбрать 3 числа из множества B и по C_{47}^3 способов выбрать 3 числа из множеств A и C. В сумме получаем $\frac{46\cdot45\cdot44}{6} + 2\cdot\frac{47\cdot46\cdot45}{6} = 15\,180 + 2\cdot 16\,215 = 47\,610$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $47\cdot47\cdot46 = 101\,614$ способов.

В сумме выходит 149 224 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{10}{3}$, $DH = HC = \frac{1}{9}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = \frac{5\sqrt{31}}{9}$, $r = \frac{4\sqrt{31}}{3\sqrt{15}}$, $R = \frac{4\sqrt{155}}{9\sqrt{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HD\cdot HE = \frac{1}{9}\cdot\frac{31}{9} = \frac{31}{81} \Rightarrow HF = \frac{\sqrt{31}}{9};$$
$$HF^2 = HC\cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = \frac{31}{9};$$
$$BA^2 = BD\cdot BE = \frac{32}{9}\cdot\frac{62}{9} = \frac{64\cdot31}{9^2} \Rightarrow BA = \frac{8}{9}\sqrt{31}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = \frac{4}{9}\sqrt{31}$. Итак, $PH = PF + FH = \frac{5}{9}\sqrt{31}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $\left(\frac{31}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot31 + \left(\frac{5}{9}\right)^2\cdot31 - 2\cdot\frac{20}{9^2}\cdot31\cos\gamma$, откуда $31 = 16+25-40\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{1}{4}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = \frac{8}{9}\sqrt{31}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = \frac{8}{9}\sqrt{31}$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{8\sqrt{31}}{9}\right)^2$; кроме того, $\frac{1}{4} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{5r}{3}$, а из первого следует, что $Rr = \frac{16\cdot 31}{81}$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = \frac{4\sqrt{155}}{9\sqrt{3}}$, $r = \frac{4\sqrt{31}}{3\sqrt{15}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1+x^2\right)\cdot\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1-x^2\right)+1\right)\log_{1-x^4}\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2};\,0\right) \cup \left(0;\,\frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1,\\
1-x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,\\
1+x^2>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\\
1+x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,\\
\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6}>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\\
\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1,\\ x \neq \frac{1}{4}.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x \in (-1;1)$ и $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{4}$.

Обозначим $\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6} = u$, $1+x^2 = v$, $1-x^2 = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$\left(\log_u v\cdot\log_u w+1\right)\log_{vw} u \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\log_u v-1\right)\left(\log_u w-1\right)}{\log_u vw} \geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c=1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{5x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(-x^4\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-3x+1\right)\left(10x^2+3x-1\right)}{x^2\left(4x^2+3x-1\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)(5x-1)(2x+1)}{x^2(x+1)(4x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup \left[-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \cup [1;+\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left[-\frac{1}{2};\,0\right) \cup \left(0;\,\frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{5}{12}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{5}{12}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{169}{60}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{5}{12}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{12}{13}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{13}{12}AH = -\frac{13x_1}{12}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{13x_2}{12}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[2] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{13x_1}{12} \cdot \frac{13x_2}{12}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{5}{12}x + b$ и параболы $y = \frac{5}{12}x^2$ определяются уравнением $\frac{5}{12}x^2 = \frac{5}{12}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{12b}{5} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{12b}{5}$.

Значит, $b^2 = -\frac{169}{144} \cdot \left(-\frac{12b}{5}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{169b}{60}$, откуда $b = \frac{169}{60}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{5}{12}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{2}{3}$; б) $CQ = \frac{7}{3}$.

Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

[2] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 9$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{9}{\ell}$, $XP = \frac{9\sqrt{3}a}{\ell} = 9\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{9}{\ell}$, $YP = \frac{9\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 9\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $YO_1 = \frac{1}{2}MN = 1$, $XO_1 = XY - YO_1 = 8$. Отсюда $1^2 - 8^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 9^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $-7 \cdot 9 = 9^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{2}{3}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{2}{3}$.

Итак, $\ell = \frac{3a}{2}$, и из подобия имеем

$$\frac{2}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{9}{\ell} = 1 - \frac{6}{a},$$

откуда $a = 7$ и $\ell = \frac{21}{2}$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{8}{9}$. Значит, $CH = \frac{8}{9}SC = \frac{28}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 7$. Отсюда $CQ = CH - HQ = \frac{7}{3}$.

Билет 7

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + ax + 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = x^2 + 2(a-1)x + b + 6$ и $f_4(x) = x^2 + (4-a)x - 2b - 3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 3.

   Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b + \sqrt{T} - \left(-b - \sqrt{T}\right)}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{a^2 - 12},\ B = \sqrt{4 + 4b},\ C = \sqrt{(2a-2)^2 - 4(6+b)},\ D = \sqrt{(4-a)^2 + 4(2b+3)}$$

   Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \left((4a^2 - 8a - 4b - 20) - (a^2 - 8a + 8b + 28)\right) = 3\left(a^2 - 4b - 16\right)$, $A^2 - B^2 = a^2 - 4b - 16$. Значит, искомое отношение равно 3.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos y} = 2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

   Ответ: 1, $\frac{4}{3}$ или $-\frac{4}{3}$.

   Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = 2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = 2\sin y\cos y \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - y - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

   откуда следует, что либо $x + y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $x - y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   В первом случае получаем, что $x + y = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = 1$.

   Во втором случае $x = y + \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части второго уравнения: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\sqrt{2}\sin(y + \pi k) = -\sqrt{2}(\sin y\cos\pi k + \cos y\sin\pi k) = (-1)^{k+1}\sqrt{2}\sin y.$$

   Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения ± 2. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot(\pm 2)}{1-4} = \mp\frac{4}{3}$.

   Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

   Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

   В первом случае получаем систему

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},\\ x = \frac{\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\cos(-y + \pi k)}{\sin y} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right),\\ x = \frac{\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-1)^k\operatorname{ctg} y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right),\\ x = \frac{\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

   Очевидно, у первого уравнения есть решения (котангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

   Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(y + \frac{3\pi 8}{+}\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(y + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right) = 2(-1)^{k+1}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 200 различных карточек с числами 201, 203, 205, …, 597, 599 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 437 844.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+4 = 3(k+1)+1$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+6$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 66, дающих остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{205; 211; 217; \ldots; 595\}$), 67 чисел, делящихся на 3 ($B = \{201; 207; 213; \ldots; 597\}$), 67 чисел, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{203; 209; 215; \ldots; 599\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{66}^3 способов выбрать 3 числа из множества A и по C_{67}^3 способов выбрать 3 числа из множеств B и C. В сумме получаем $\frac{66\cdot65\cdot64}{6} + 2\cdot\frac{67\cdot66\cdot65}{6} = 45\,760 + 2\cdot 47\,905 = 141\,570$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $66\cdot67\cdot67 = 296\,274$ способов.

В сумме выходит 437 844 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 5$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = \frac{5\sqrt{14}}{2}$, $r = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$, $R = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC\cdot HB = 2\cdot 7 = 14 \Rightarrow HF = \sqrt{14};$$

$$HF^2 = HD\cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 7;$$

$$BA^2 = BD\cdot BE = 9\cdot 14 \Rightarrow BA = 3\sqrt{14}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{14}$. Итак, $PH = PF + FH = \frac{5}{2}\sqrt{14}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $49 = \frac{63}{2} + \frac{175}{2} - 105\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 3\sqrt{14}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 3\sqrt{14}$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(3\sqrt{14}\right)^2$; кроме того, $\frac{2}{3} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = 5r$, а из первого следует, что $Rr = \frac{63}{2}$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 3\sqrt{\frac{35}{2}}$, $r = 3\sqrt{\frac{7}{10}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\cdot\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{16}x^4}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}\right) \geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{8}{15}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-\frac{x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2,\\
1-\frac{x^2}{4} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,\\
1+\frac{x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\\
1+\frac{x^2}{4} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,\\
\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\\
\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{8}{3},\\ x \neq \frac{2}{3}.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x \in (-2; 2)$ и $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$.

Обозначим $\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27} = u$, $1+\frac{x^2}{4} = v$, $1-\frac{x^2}{4} = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$\left(\log_u v\cdot\log_u w+1\right)\log_{vw} u \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\log_u v-1\right)\left(\log_u w-1\right)}{\log_u vw} \geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{12}\frac{x}{3}+\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{8}{27}\right)}{\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}-\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{x^4}{16}\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3x^2}{4}-3x+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{15x^2}{4}+3x-\frac{8}{3}\right)}{x^2\left(\frac{3x^2}{2}+3x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)\frac{15}{4}\left(x-\frac{8}{15}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{\frac{3x^2}{2}\left(x+\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right)\cup\left[-\frac{4}{3}; 0\right)\cup\left(0; \frac{8}{15}\right]\cup\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3}; +\infty\right).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{8}{15}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{4}{3}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{4}{3}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{25}{12}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{4}{3}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{3}{5}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{5}{3}AH = -\frac{5x_1}{3}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{5x_2}{3}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[3] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{5x_1}{3} \cdot \frac{5x_2}{3}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{4}{3}x + b$ и параболы $y = \frac{4}{3}x^2$ определяются уравнением $\frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3b}{4} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{3b}{4}$. Значит, $b^2 = -\frac{25}{9} \cdot \left(-\frac{3b}{4}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{25b}{12}$, откуда $b = \frac{25}{12}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{4}{3}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 4$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{3}$; б) $CQ = \frac{25}{3}$.

Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

[3] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 9$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{9}{\ell}$, $XP = \frac{9\sqrt{3}a}{\ell} = 9\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{9}{\ell}$, $YP = \frac{9\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 9\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $XO_1 = \frac{1}{2}KL = 2$, $YO_1 = XY - XO_1 = 7$. Отсюда $7^2 - 2^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 9^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $5 \cdot 9 = 9^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{1}{3}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{1}{3}$.

Итак, $\ell = 3a$, и из подобия имеем

$$\frac{4}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{9}{\ell} = 1 - \frac{3}{a},$$

откуда $a = 5$ и $\ell = 15$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{2}{9}$. Значит, $CH = \frac{2SC}{9} = \frac{10}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 5$. Отсюда $CQ = CH + HQ = \frac{25}{3}$.

Билет 8

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2+2x+a$, $f_2(x) = x^2+bx-1$, $f_3(x) = 2x^2+(6-b)x+3a+1$ и $f_4(x) = 2x^2+(3b-2)x-a-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-\left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{4-4a},\ B = \sqrt{b^2+4},\ C = \frac{1}{2}\sqrt{(6-b)^2-8(1+3a)},\ D = \frac{1}{2}\sqrt{(3b-2)^2+8(a+3)}$$

   Отсюда следует, что $C^2-D^2 = \frac{1}{4}\left((b^2-12b-24a+28)-(9b^2-12b+8a+28)\right) = -2\left(b^2+4a\right)$, $A^2-B^2 = -\left(b^2+4a\right)$. Значит, искомое отношение равно 2.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos y} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin y} = 3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

   Ответ: 1, $\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{4}$.

   Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos y\sin y} = 2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = 2\sin y\cos y \Leftrightarrow \cos 2x+\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-y-\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

   откуда следует, что либо $x+y+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $x-y-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   В первом случае получаем, что $x+y = \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = 1$.

   Во втором случае $x = y+\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части первого уравнения: $\cos x-\sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y+\pi+\pi k\right) = -\sqrt{2}\cos(y+\pi k) = -\sqrt{2}(\cos y\cos\pi k-\sin y\sin\pi k) = (-1)^{k+1}\sqrt{2}\cos y.$$

   Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения ± 3. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot(\pm3)}{1-9} = \mp\frac{3}{4}$.

   Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

   Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

   В первом случае получаем систему

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos y} = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},\\ x = \frac{\pi}{4}-y+\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y+\pi k\right)}{\cos y} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x = \frac{\pi}{4}-y+\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-1)^k\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x = \frac{\pi}{4}-y+\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

   Очевидно, у первого уравнения есть решения (тангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

   Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi8}{+}\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) = 3(-1)^{k+1}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 160 различных карточек с числами 5, 10, 15, …, 795, 800 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 223 342.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+5 = 3(k+1)+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+10 = 3(k+3)+1$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+15$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 53, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{10; 25; 40; \ldots; 790\}$), 53 числа, делящихся на 3 ($B = \{15; 30; 45; \ldots; 795\}$), 54 числа, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{5; 20; 35; \ldots; 800\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{54}^3 способов выбрать 3 числа из множества C и по C_{53}^3 способов выбрать 3 числа из множеств A и B. В сумме получаем $\frac{54\cdot53\cdot52}{6} + 2\cdot\frac{53\cdot52\cdot51}{6} = 24\,804 + 2\cdot 23\,426 = 71\,656$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $53\cdot54\cdot54 = 151\,686$ способов.

В сумме выходит 223 342 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{48}{7}$, $DH = HC = \frac{1}{7}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = 6$, $r = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HD\cdot HE = \frac{1}{7}\cdot 7 = 1 \Rightarrow HF = 1;$$

$$HF^2 = HC\cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = 7;$$

$$BA^2 = BD\cdot BE = \frac{50}{7}\cdot 14 = 100 \Rightarrow BA = 10.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = 5$. Итак, $PH = PF + FH = 6$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $49 = 25 + 36 - 60\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{1}{5}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R+r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 10$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 10$, $OH = R-r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2+10^2$; кроме того, $\frac{1}{5} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{3r}{2}$, а из первого следует, что $Rr = 25$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$, $r = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\cdot\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{81}x^4}\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x\in[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};\,0\right)\cup(0;\,2]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-\frac{x^2}{9}>0 \Leftrightarrow -3<x<3,\\
1-\frac{x^2}{9}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
1+\frac{x^2}{9}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
1+\frac{x^2}{9}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1,\\ x\neq 4.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x\in(-3;3)$ и $x\neq 0$, $x\neq -1$.

Обозначим $\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}=u$, $1+\frac{x^2}{9}=v$, $1-\frac{x^2}{9}=w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$(\log_u v\cdot\log_u w+1)\log_{vw}u\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{(\log_u v-1)(\log_u w-1)}{\log_u vw}\geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b-\log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c=1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)}\geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{27}+\frac{2x}{9}+\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{5x^2}{27}+\frac{2x}{9}+\frac{8}{27}\right)}{\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}-\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{x^4}{81}\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x^2+6x+8)(5x^2-6x-8)}{x^2(x^2-3x-4)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x+4)(x-2)(5x+4)}{x^2(x-4)(x+1)}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};0\right)\cup(0;2]\cup[4;+\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x\in[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};\,0\right)\cup(0;\,2]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y=b$, пересекает параболу $y=\frac{12}{5}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y=\frac{12}{5}x+b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{169}{60}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{12}{5}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{5}{13}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{13}{5}AH = -\frac{13x_1}{5}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{13x_2}{5}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[4] $CT\cdot OT = AT\cdot BT$, т.е. $b\cdot b = -\frac{13x_1}{5}\cdot\frac{13x_2}{5}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{12}{5}x + b$ и параболы $y = \frac{12}{5}x^2$ определяются уравнением $\frac{12}{5}x^2 = \frac{12}{5}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{5b}{12} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{5b}{12}$.

Значит, $b^2 = -\frac{169}{25}\cdot\left(-\frac{5b}{12}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{169b}{60}$, откуда $b = \frac{169}{60}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{12}{5}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 14$, $KN = LM = 25$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{3}{5}$; б) $CQ = \frac{77}{5}$.

Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

[4]Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT\cdot OT = AT\cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 25$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{25}{\ell}$, $XP = \frac{25\sqrt{3}a}{\ell} = 25\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{25}{\ell}$, $YP = \frac{25\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 25\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $YO_1 = \frac{1}{2}MN = 7$, $XO_1 = XY - YO_1 = 18$. Отсюда $7^2 - 18^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 25^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $-11 \cdot 25 = 25^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{3}{5}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{3}{5}$.

Итак, $\ell = \frac{5a}{3}$, и из подобия имеем

$$\frac{14}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{25}{\ell} = 1 - \frac{15}{a},$$

откуда $a = 22$ и $\ell = \frac{110}{3}$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{18}{25}$. Значит, $CH = \frac{18}{25}SC = \frac{132}{5}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 11$. Отсюда $CQ = CH - HQ = \frac{77}{5}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Выведена или указана формула для модуля разности между корнями уравнения 1 балл;

2. **(6 баллов)** Получено равенство синуса и косинуса (как в решении) .... 2 балла;

   разобран случай, приводящий к ответу 1 или -1 .... 1 балл;

   разобран другой случай .... 3 балла.

   Внимание! В решении **НЕ** требуется доказывать, что случаи реализуются. За отсутствие доказательства баллы не снимаются.

3. **(5 баллов)** Посчитано количество чисел, дающих остатки 0, 1, 2 при делении на 3 ... 1 балл;

   найдено количество способов, когда все три остатка различны .... 2 балла;

   найдено количество способов, когда все три остатка одинаковы .... 2 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев (или учтены не все случаи) .. не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 6 раз больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать.

4. **(7 баллов)** Найден отрезок HF .... 1 балл;

   найден отрезок AB .... 1 балл;

   найден отрезок HP .... 1 балл;

   найдены радиусы окружностей .... 4 балла.

5. **(6 баллов)** Нахождение ОДЗ отдельно не оценивается.

   За любое неэквивалентное на ОДЗ преобразование[1] .... 0 баллов за задачу;

   Неравенство преобразовано к виду $\frac{(\log_u w-1)(\log_u v-1)}{\log_u vw} \geqslant 0$ .... 2 балла;

   неравенство сведено к рациональному или системе рациональных неравенств .... 1 балл;

[1] Под неэквивалентным преобразованием понимается любое недопустимое действие с неравенством (ниже приведены примеры таких действий):

– умножение обеих частей на выражение неизвестного знака,

– неверные формулы при работе с логарифмами (сумма логарифмов – это логарифм суммы и пр.),

– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$ или $\log_a b \geqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$,

– если осуществляется переход от логарифмического неравенства к рациональному, и при этом не учитывается, что основания логарифмов переменные (т.е. нет ни метода рационализации, ни рассмотрения случаев, когда основание логарифма больше/меньше 1: например, выполнен переход от неравенства $\log_x(f(x)) < \log_x(g(x))$ к неравенству $f(x) < g(x)$).

ответ отличается от верного конечным количеством точек .... снять по 1 баллу за каждую лишнюю/недостающую точку, но не более 3 баллов;

ответ отличается от верного более чем на конечное число точек .. не более 3 баллов за задачу.

6. **(6 баллов)** Составлено уравнение хотя бы одного серединного перпендикуляра .... 1 балл;

   за нахождение координат точек пересечения прямой и параболы .... баллы не добавляются.

7. **(7 баллов)** Доказано, что $KLMN$ – прямоугольник, стороны которого параллельны рёбрам пирамиды .... 2 балла;

   найден угол SAB .... 3 балла;

   найден отрезок CQ .... 2 балла.

Билет 13

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

   Ответ: $\sqrt{26}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 + 1 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 = ax + b - 2$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b-1) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b-4}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b - 4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b-4)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b-8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b-4) = 18, \\ (a^2+1)(a^2+4b-8) = 10, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = 3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b} = \sqrt{13}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = \sqrt{13}\sqrt{2} = \sqrt{26}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \dfrac{2}{5} + \cos^2(x+y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = \dfrac{3}{5} + \sin^2(x+y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 3y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: -1 или $\frac{1}{5}$.

   Решение. Заметим, что

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$
$$= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x)\cos x = (2\cos 2x - 1)\cos x,$$
$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x =$$
$$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = (2\cos 2x + 1)\sin x.$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x+y), \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x+y) \end{cases} \qquad (1)$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (**??**) и получаем $\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\sin x}{\sin y} = 2$, откуда $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$ и $\cos x \sin y + \sin x \cos y = 2\sin y \cos y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(x+y) = \sin 2y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 2y + 2\pi k, \\ x + y = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi k, \\ x = \pi - 3y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x = y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases} 1 = \frac{2}{5} + \cos^2 2y, \\ 1 = \frac{3}{5} + \sin^2 2y; \end{cases}$ отсюда $\sin^2 2y = \frac{2}{5}$, $\cos^2 2y = \frac{3}{5}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x + 3y) = \cos 4y = 2\cos^2 2y - 1 = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$.

   Если $x = \pi - 3y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 3y}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2 2y, \\ \frac{\sin 3y}{\sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 y = \frac{2}{5} + \cos^2 2y, \\ 3 - 4\sin^2 y = \frac{3}{5} + \sin^2 2y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 2y + 2\cos 2y - \frac{3}{5} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 2y = -1+\sqrt{\frac{8}{5}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x+3y) = \cos(\pi + 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x+3y)$ может быть равен $\frac{1}{5}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x+6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

Ответ: 267 903.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени двоек и троек. Есть 51 способ выбрать чётную степень двойки и 51 способ выбрать чётную степень тройки, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $51^2 = 2601$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями двойки. Так как в произведении выбранных чисел двойка обязана присутствовать в чётной степени, степени двойки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 52 карточки с нечётными степенями и 51 карточка с чётными степенями. Значит, есть $C_{52}^2 = \frac{52\cdot 51}{2} = 1326$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{51}^2 = \frac{51\cdot 50}{2} = 1275$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2601 способ. После того, как выбраны карточки со степенями двойки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью тройки (51 способ). Так как выбор карточки со степенью тройки осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2601 \cdot 51 = 132\,651$ способ.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2601 + 132\,651 \cdot 2 = 267\,903$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 8$, $PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{5760}{409}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 2$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+4} = \frac{2}{3}$, $y = 8$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 10^2 + \frac{9}{4} = \frac{409}{4}$. Следовательно, $PT = PO - OT = \frac{\sqrt{409}}{2} - \frac{5}{2}$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{409}}{2} = \frac{3}{\sqrt{409}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{20}{\sqrt{409}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{120}{409}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA\cdot PC\sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\frac{120}{409} = \frac{5760}{409}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1+27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+27x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Решение. Пусть $1+x^2 = u$, $1-2x^2+27x^4 = v$, $1+27x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - 2x^2 + 27x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 + 27x^5 > 0$, откуда $x > -\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(27x^5+1-x^2-1\right)\left(1-2x^2+27x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-2x^2+27x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x^4\left(27x^3-1\right)\left(9x^2-1\right)}{x^4\left(27x^2-2\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x-1)\left(9x^2+3x+1\right)(3x+1)(3x-1)}{\left(27x^2-2\right)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x+1)(3x-1)^2}{\left(x-\sqrt{\frac{2}{27}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{2}{27}}\right)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 26(y\sin 2a - x\cos 2a), \\ x^2+y^2 = 26(y\cos 3a - x\sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

Ответ: $a = \frac{\pi}{10} \pm \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{12}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x+13\cos 2a)^2 + (y-13\sin 2a)^2 = 169, \\ (x+13\sin 3a)^2 + (y-13\cos 3a)^2 = 169. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 13; у первой из них центром является точка $A(-13\cos 2a; 13\sin 2a)$, а у второй – точка $B(-13\sin 3a; 13\cos 3a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 10 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos 2a = \sin 3a, \\ \sin 2a = \cos 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2}+3a\right) = 0, \\ \cos 3a + \cos\left(\frac{\pi}{2}+2a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi+2a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi-2a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+10a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi+2a}{4} = \cos\frac{\pi-2a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 10 друг от друга, $PQ = 10$, поэтому $AB^2 + 100 = 4\cdot 169$, $AB = 24$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 24. Отсюда

$$\sqrt{(-13\sin 3a + 13\cos 2a)^2 + (13\cos 3a - 13\sin 2a)^2} = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 338 - 338\sin 3a\cos 2a - 338\sin 2a\cos 3a = 576 \Leftrightarrow 338\sin 5a = -238 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{k+1}}{5}\arcsin\frac{119}{169} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

Ответ: а) $AB = \sqrt{15}$; б) $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника ABA_1, A_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (ABA_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через M перпендикулярно CC_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QA_1 = 1 : 2 = CM : MC_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (ABB_1A_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника ABA_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{5}$. Отсюда $AB = R\sqrt{3} = \sqrt{15}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек A_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AC.

Прямоугольные треугольники A_1YA и A_1YB равны по катету и гипотенузе, так что $YA = YB$. Значит, высота YX треугольника ABY равна $XA \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{15}{8}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(CC_1, ABA_1) = \angle YA_1X = \arcsin \frac{YX}{A_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{15}{8}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15}\right)\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Пусть T – проекция Z на AC. Тогда $ZT = YZ\cos\angle YZT = YZ\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $YT = YZ\sin\angle YZT = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$. С другой стороны, поскольку $CZ = MO = \sqrt{5}$, имеем $CT = \sqrt{CZ^2 - ZT^2} = \sqrt{5 - \frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Отсюда $A_1C_1 = YC = CT - YT = \frac{2\sqrt{10}}{3} - \frac{5}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Билет 14

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{34}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x) - 1$.

   Ответ: $3\sqrt{2}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 1 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 + 1 = ax + b + 3$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b+1) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+4}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b+4) = 34, \\ (a^2+1)(a^2+4b+8) = 42, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = 3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b + 1 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b - 4} = 3$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin 2y} = \dfrac{1}{5} + \cos^2(x - 2y)$ и $\dfrac{\cos 3x}{(1 - 2\cos 2x)\cos 2y} = \dfrac{4}{5} + \sin^2(x - 2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 6y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: 1 или $-\frac{3}{5}$.

   Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x)\cos x = (2\cos 2x - 1)\cos x, \\ \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\ &= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = (2\cos 2x + 1)\sin x. \end{aligned}$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin 2y} = \frac{1}{5} + \cos^2(x - 2y), \\ -\frac{\cos x}{\cos 2y} = \frac{4}{5} + \sin^2(x - 2y) \end{cases} \qquad (3)$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (**??**) и получаем $\frac{\sin x}{\sin 2y} - \frac{\cos x}{\cos 2y} = 2$, откуда $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$ и $\cos x \sin 2y - \sin x \cos 2y = 2\sin 2y \cos 2y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(x - 2y) = \sin 4y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 4y + 2\pi k, \\ x - 2y = \pi - 4y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6y + 2\pi k, \\ x = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases} 1 = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ 1 = \frac{4}{5} + \sin^2 4y; \end{cases}$ отсюда $\cos^2 4y = \frac{4}{5}$, $\sin^2 4y = \frac{1}{5}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x - 6y) = -\cos 8y = -2\cos^2 4y + 1 = -2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$.

   Если $x = 6y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\sin 6y}{\sin 2y} = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ -\frac{\cos 6y}{\cos 2y} = \frac{4}{5} + \sin^2 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\sin^2 2y = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ 3 - 4\cos^2 2y = \frac{4}{5} + \sin^2 4y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 4y - 2\cos 4y - \frac{4}{5} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 4y = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x + 6y) = \cos(2\pi k) = 1$.

Итак, $\cos(x - 6y)$ может быть равен $-\frac{3}{5}$ или 1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x - 6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 183 различные карточки с числами $1,\ 2,\ 11,\ 2^2,\ 11^2, \ldots, 2^{91},\ 11^{91}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 22?

Ответ: 184 275.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени чисел два и одиннадцать. Есть 45 способов выбрать чётную степень двойки и 45 способов выбрать чётную степень числа одиннадцать, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $45^2 = 2025$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями двойки и одну со степенью числа одиннадцать или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями двойки. Так как в произведении выбранных чисел двойка обязана присутствовать в чётной степени, степени двойки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 46 карточек с нечётными степенями и 45 карточек с чётными степенями. Значит, есть $C_{46}^2 = \frac{46 \cdot 45}{2} = 1035$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{45}^2 = \frac{45 \cdot 44}{2} = 990$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2025 способов. После того, как выбраны карточки со степенями двойки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью числа одиннадцать (45 способов). Так как выбор карточки со степенью числа одиннадцать осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2025 \cdot 45 = 91\,125$ способов.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями числа одиннадцать и одну со степенью двойки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2025 + 91\,125 \cdot 2 = 184\,275$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 3. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = \frac{3}{2}$, $PT = \sqrt{13} - \frac{5}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{81}{26}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = \frac{3}{2}$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{2}$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Следовательно, $PT = PO - OT = \sqrt{13} - \frac{5}{2}$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = 2 : \sqrt{13} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{12}{13}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA\cdot PC\sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12}{13} = \frac{81}{26}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-8x^5\right) + \log_{1-x^2+8x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-x^2+8x^4}\left(1-8x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[5]{8}}\right)$.

Решение. Пусть $1+x^2 = u$, $1-x^2+8x^4 = v$, $1-8x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (4)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - x^2 + 8x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 - 8x^5 > 0$, откуда $x < \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(1-8x^5-x^2-1\right)\left(1-x^2+8x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-x^2+8x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4\left(-8x^3-1\right)\left(4x^2-1\right)}{x^4\left(8x^2-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)(2x+1)(2x-1)}{\left(8x^2-1\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[5]{8}}\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(x\cos 4a + y\sin 4a), \\ x^2 + y^2 = 10(x\sin a + y\cos a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 6.

Ответ: $a = \frac{\pi}{10} \pm \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x - 5\cos 4a)^2 + (y - 5\sin 4a)^2 = 25, \\ (x - 5\sin a)^2 + (y - 5\cos a)^2 = 25. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 5; у первой из них центром является точка $A(5\cos 4a; 5\sin 4a)$, а у второй – точка $B(5\sin a; 5\cos a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 6 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos 4a = \sin a, \\ \sin 4a = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 0, \\ \cos a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi-6a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi+6a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+10a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi-6a}{4} = \cos\frac{\pi+6a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 6 друг от друга, $PQ = 6$, поэтому $AB^2 + 36 = 4 \cdot 25$, $AB = 8$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 8. Отсюда

$$\sqrt{(5\sin a - 5\cos 4a)^2 + (5\cos a - 5\sin 4a)^2} = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50 - 50\sin a\cos 4a - 50\sin 4a\cos a = 64 \Leftrightarrow 50\sin 5a = -14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{k+1}}{5}\arcsin\frac{7}{25} + \frac{k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN : NA_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

а) Найдите длину ребра BB_1.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

Ответ: а) $BB_1 = \sqrt{15}$; б) $\angle(AA_1, BB_1C) = \pi/4$, $A_1B_1 = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника BCB_1, B_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (BCB_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через N перпендикулярно AA_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QB_1 = 1 : 2 = AN : NA_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (BCC_1B_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника BCB_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{5}$. Отсюда $BC = R\sqrt{3} = \sqrt{15}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек B_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $AA_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AB.

Прямоугольные треугольники B_1YB и B_1YC равны по катету и гипотенузе, так что $YC = YB$. Значит, высота YX треугольника CBY равна $XB \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{45}{8}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(AA_1, BCB_1) = \angle YB_1X = \arcsin \frac{YX}{B_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{45}{8}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15}\right)\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\angle(AA_1, BCB_1) = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Пусть T – проекция Z на AB. Тогда $ZT = YZ \cos \angle YZT = YZ \cos \angle ABC = 1$ и $YT = YZ \sin \angle YZT = \sqrt{\frac{3}{2}}$. С другой стороны, поскольку $AZ = NO = \sqrt{5}$, имеем $AT = \sqrt{AZ^2 - ZT^2} = \sqrt{5-1} = 2$. Отсюда $A_1B_1 = AY = AT - YT = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Билет 15

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{26}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

   Ответ: $\sqrt{10}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 2 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 = ax + b + 1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b+2) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+8}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}(a^2+1)(a^2+4b+8) = 26,\\(a^2+1)(a^2+4b+4) = 18,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = 1$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2+4b} = \sqrt{5}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{10}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \dfrac{2}{3} + \cos^2(x-y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = -\dfrac{1}{3} - \sin^2(x-y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 3y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: -1 или $-\frac{1}{3}$.

   Решение. Заметим, что

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x\cos x =$$
$$= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x)\cos x = (2\cos 2x - 1)\cos x,$$
$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x =$$
$$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = (2\cos 2x + 1)\sin x.$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2}{3} + \cos^2(x-y),\\ \frac{\sin x}{\sin y} = -\frac{1}{3} - \sin^2(x-y)\end{cases} \qquad (5)$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$). Вычитаем из первого равенства (**??**) второе и получаем $\frac{\cos x}{\cos y} - \frac{\sin x}{\sin y} = 2$, откуда $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$ и $\cos x \sin y - \sin x \cos y = 2\sin y \cos y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(y - x) = \sin 2y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 2y + 2\pi k,\\ y - x = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y - 2\pi k,\\ x = 3y - \pi - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x = -y - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases}1 = \frac{2}{3} + \cos^2 2y,\\ -1 = -\frac{1}{3} - \sin^2 2y;\end{cases}$ отсюда $\sin^2 2y = \frac{2}{3}$, $\cos^2 2y = \frac{1}{3}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x - 3y) = \cos 4y = 2\cos^2 2y - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

   Если $x = 3y - \pi - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 3y}{\cos y} = \frac{2}{3} + \cos^2 2y, \\ -\frac{\sin 3y}{\sin y} = -\frac{1}{3} - \sin^2 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 y = \frac{2}{3} + \cos^2 2y, \\ 4\sin^2 y - 3 = -\frac{1}{3} - \sin^2 2y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 2y + 2\cos 2y - \frac{1}{3} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 2y = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x - 3y) = \cos(-\pi - 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x - 3y)$ может быть равен $-\frac{2}{3}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x - 3y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 195 различных карточек с числами $1, 5, 7, 5^2, 7^2, \ldots, 5^{97}, 7^{97}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 35?

Ответ: 223 488.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени пятёрок и семёрок. Есть 48 способов выбрать чётную степень пятёрки и 48 способов выбрать чётную степень семёрки, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $48^2 = 2304$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями пятёрки и одну со степенью семёрки или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями семёрки. Так как в произведении выбранных чисел семёрка обязана присутствовать в чётной степени, степени семёрки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 49 карточек с нечётными степенями и 48 карточек с чётными степенями. Значит, есть $C_{49}^2 = \frac{49 \cdot 48}{2} = 1176$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{48}^2 = \frac{48 \cdot 47}{2} = 1128$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2304 способов. После того, как выбраны карточки со степенями семёрки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью пятёрки (48 способов). Так как выбор карточки со степенью пятёрки осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2304 \cdot 48 = 110\,592$ способов.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями пятёрки и одну со степенью семёрки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2304 + 110\,592 \cdot 2 = 223\,488$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 6,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 5$, $PT = \frac{3\sqrt{41}-13}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1000}{41}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = \frac{5}{2}$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+5} = \frac{1}{2}$, $y = 5$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = 36$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 36 = \frac{369}{4}$. Следовательно, $PT = PO - OT = \frac{3\sqrt{41}}{2} - \frac{13}{2}$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = 6 : \frac{3\sqrt{41}}{2} = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{40}{41}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10\cdot\frac{40}{41} = \frac{1000}{41}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1+8x^5\right) + \log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+8x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{8}}; -\frac{1}{2}\right] \bigcup \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \bigcup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Решение. Пусть $1+x^2 = u$, $1-3x^2+16x^4 = v$, $1+8x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (6)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - 3x^2 + 16x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 + 8x^5 > 0$, откуда $x > -\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(8x^5+1-x^2-1\right)\left(1-3x^2+16x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-3x^2+16x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x^4\left(8x^3-1\right)\left(4x^2-1\right)}{x^4\left(16x^2-3\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)(2x+1)(2x-1)}{(16x^2-3)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x+1)(2x-1)^2}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \bigcup \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \bigcup \left\{\frac{1}{2}\right\}. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{8}}; -\frac{1}{2}\right] \bigcup \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \bigcup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y\sin a - x\cos a), \\ x^2 + y^2 = 26(y\cos 2a - x\sin 2a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 24.

Ответ: $a = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x + 13\cos a)^2 + (y - 13\sin a)^2 = 169, \\ (x + 13\sin 2a)^2 + (y - 13\cos 2a)^2 = 169. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 13; у первой из них центром является точка $A(-13\cos a; 13\sin a)$, а у второй – точка $B(-13\sin 2a; 13\cos 2a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 24 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos a = \sin 2a, \\ \sin 2a = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = 0, \\ \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+6a}{4}\cos\frac{\pi+2a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi+6a}{4}\cos\frac{\pi-2a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+6a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi+2a}{4} = \cos\frac{\pi-2a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 24 друг от друга, $PQ = 24$, поэтому $AB^2 + 576 = 4 \cdot 169$, $AB = 10$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 10. Отсюда

$$\sqrt{(-13\sin 2a + 13\cos a)^2 + (13\cos 2a - 13\sin a)^2} = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 338 - 338\sin 2a\cos a - 338\sin a\cos 2a = 100 \Leftrightarrow 338\sin 3a = 238 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^k}{3}\arcsin\frac{119}{169} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника AA_1B и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите угол между прямой C_1C и плоскостью AA_1B, а также длину ребра A_1C_1.

Ответ: а) $AB = \sqrt{21}$; б) $\angle(C_1C, AA_1B) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $A_1C_1 = \frac{7-2\sqrt{7}}{3}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника ABA_1, A_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (ABA_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через M перпендикулярно CC_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QA_1 = 1 : 2 = CM : MC_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (ABB_1A_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника ABA_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{7}$. Отсюда $AB = R\sqrt{3} = \sqrt{21}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек A_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AC.

Прямоугольные треугольники A_1YA и A_1YB равны по катету и гипотенузе, так что $YA = YB$. Значит, высота YX треугольника ABY равна $XA \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{21}{2}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(CC_1, ABA_1) = \angle YA_1X = \arcsin \frac{YX}{A_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{21}{2}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{21}\right)\right) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Пусть T – проекция Z на AC. Тогда $ZT = YZ \cos\angle YZT = YZ \cos\angle BAC = \frac{\sqrt{14}}{3}$ и $YT = YZ \sin\angle YZT = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. С другой стороны, поскольку $CZ = MO = \sqrt{7}$, имеем $CT = \sqrt{CZ^2 - ZT^2} = \sqrt{7 - \frac{14}{9}} = \frac{7}{3}$. Отсюда $A_1C_1 = YC = CT - YT = \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Билет 16

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x) + 1$.

   Ответ: $\sqrt{34}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 + 2 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 - 1 = ax + b + 1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b - 2) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b-8}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b - 8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2 + 1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b - 8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b - 8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2 + 1)(a^2 + 4b - 8) = 10, \\ (a^2 + 1)(a^2 + 4b + 8) = 42, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = 3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b - 1 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 4} = \sqrt{17}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{17}\sqrt{2} = \sqrt{34}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos 2y} = \dfrac{1}{6} + \sin^2(x + 2y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin 2y} = \dfrac{5}{6} + \cos^2(x + 2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 6y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: -1 или $-\frac{2}{3}$.

   Решение. Заметим, что

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$
$$= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x)\cos x = (2\cos 2x - 1)\cos x,$$
$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x =$$
$$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = (2\cos 2x + 1)\sin x.$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos 2y} = \frac{1}{6} + \sin^2(x + 2y), \\ \frac{\sin x}{\sin 2y} = \frac{5}{6} + \cos^2(x + 2y) \end{cases} \qquad (7)$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (**??**) и получаем $\frac{\cos x}{\cos 2y} + \frac{\sin x}{\sin 2y} = 2$, откуда $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$ и $\cos x \sin 2y + \sin x \cos 2y = 2\sin 2y \cos 2y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(x + 2y) = \sin 4y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y = 4y + 2\pi k, \\ x + 2y = \pi - 4y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y + 2\pi k, \\ x = \pi - 6y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x = 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases} 1 = \frac{1}{6} + \sin^2 4y, \\ 1 = \frac{5}{6} + \cos^2 4y; \end{cases}$ отсюда $\sin^2 4y = \frac{5}{6}$, $\cos^2 4y = \frac{1}{6}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x + 6y) = \cos 8y = 2\cos^2 4y - 1 = 2 \cdot \frac{1}{6} - 1 = -\frac{2}{3}$.

   Если $x = \pi - 6y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 6y}{\cos 2y} = \frac{1}{6} + \sin^2 4y, \\ \frac{\sin 6y}{\sin 2y} = \frac{5}{6} + \cos^2 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 2y = \frac{1}{6} + \sin^2 4y, \\ 3 - 4\sin^2 2y = \frac{5}{6} + \cos^2 4y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 4y - 2\cos 4y - \frac{1}{6} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 4y = 1 - \sqrt{\frac{7}{6}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x+6y) = \cos(\pi + 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x+6y)$ может быть равен $-\frac{2}{3}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x+6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 167 различных карточек с числами $1, 3, 11, 3^2, 11^2, \ldots, 3^{83}, 11^{83}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 33?

Ответ: 139 523.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени чисел три и одиннадцать. Есть 41 способ выбрать чётную степень тройки и 41 способ выбрать чётную степень числа одиннадцать, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $41^2 = 1681$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями тройки и одну со степенью числа одиннадцать или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями тройки. Так как в произведении выбранных чисел тройка обязана присутствовать в чётной степени, степени тройки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 42 карточки с нечётными степенями и 41 карточка с чётными степенями. Значит, есть $C_{42}^2 = \frac{42\cdot 41}{2} = 861$ способ выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{41}^2 = \frac{41\cdot 40}{2} = 820$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 1681 способ. После того, как выбраны карточки со степенями тройки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью числа одиннадцать (41 способ). Так как выбор карточки со степенью числа одиннадцать осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $1681 \cdot 41 = 68\,921$ способ.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями числа одиннадцать и одну со степенью тройки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $1681 + 68\,921 \cdot 2 = 139\,523$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 8. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 5$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 2$, $PT = 3\sqrt{5} - 5$, $S_{\triangle APC} = 8$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 4$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+8} = \frac{1}{5}$, $y = 2$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 25 - 16 = 9$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 6^2 + 9 = 45$. Следовательно, $PT = PO - OT = 3\sqrt{5} - 5$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = 3 : \sqrt{45} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{4}{5}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = 8$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-27x^5\right) + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1-27x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$.

Решение. Пусть $1 + x^2 = u$, $1 - 3x^2 + 36x^4 = v$, $1 - 27x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (8)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - 3x^2 + 36x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 - 27x^5 > 0$, откуда $x < \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(1-27x^5-x^2-1\right)\left(1-3x^2+36x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-3x^2+36x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x^4\left(-27x^3-1\right)\left(9x^2-1\right)}{3x^4\left(12x^2-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x+1)\left(9x^2-3x+1\right)(3x+1)(3x-1)}{\left(12x^2-1\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x-1)(3x+1)^2}{\left(x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=10(x\cos a+y\sin a), \\ x^2+y^2=10(x\sin 3a+y\cos 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 8.

Ответ: $a=\frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x-5\cos a)^2+(y-5\sin a)^2=25, \\ (x-5\sin 3a)^2+(y-5\cos 3a)^2=25. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 5; у первой из них центром является точка $A(5\cos a;5\sin a)$, а у второй – точка $B(5\sin 3a;5\cos 3a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 8 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos a=\sin 3a, \\ \sin 3a=\cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos a+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3a\right)=0, \\ \cos 3a+\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+8a}{4}\cos\frac{\pi+4a}{4}=0, \\ 2\cos\frac{\pi+8a}{4}\cos\frac{\pi-4a}{4}=0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+8a}{4}=0$, либо $\cos\frac{\pi-4a}{4}=\cos\frac{\pi+4a}{4}=0$. В первом случае получаем $a=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2+PQ^2=4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 8 друг от друга, $PQ=8$, поэтому $AB^2+64=4\cdot 25$, $AB=6$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 6. Отсюда

$$\sqrt{(5\sin 3a-5\cos a)^2+(5\cos 3a-5\sin a)^2}=6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50-50\sin a\cos 3a-50\sin 3a\cos a=36\Leftrightarrow 50\sin 4a=14\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{(-1)^k}{4}\arcsin\frac{7}{25}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC\parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN:NA_1=1:2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

а) Найдите длину ребра BB_1.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

Ответ: а) $BB_1=\sqrt{21}$; б) $\angle(AA_1,BB_1C)=\pi/6$, $A_1B_1=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника BCB_1, B_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (BCB_1), проходящем через Q. С другой стороны, O лежит в плоскости α, проходящей через N перпендикулярно AA_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ:QB_1=1:2=AN:NA_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (BCC_1B_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника BCB_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{7}$. Отсюда $BC = R\sqrt{3} = \sqrt{21}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек B_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $AA_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AB.

Прямоугольные треугольники B_1YB и B_1YC равны по катету и гипотенузе, так что $YC = YB$. Значит, высота YX треугольника CBY равна $XB \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(AA_1, BCB_1) = \angle YB_1X = \arcsin\frac{YX}{B_1X} = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{7}}{4} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{21}\right)\right) = \arcsin\frac{1}{2},$$

откуда $\angle(AA_1, BCB_1) = \frac{\pi}{6}$. Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Пусть T – проекция Z на AB. Тогда $ZT = YZ\cos\angle YZT = YZ\cos\angle ABC = 1$ и $YT = YZ\sin\angle YZT = \frac{\sqrt{3}}{2}$. С другой стороны, поскольку $AZ = NO = \sqrt{7}$, имеем $AT = \sqrt{AZ^2 - ZT^2} = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$. Отсюда $A_1B_1 = AY = AT - YT = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов . . . . 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты . . . . 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс . . . . 0 баллов за задачу.

2. **(6 баллов)** Сокращены дроби в левых частях равенств . . . . 1 балл;

   получено равенство синусов (как в решении) . . . . 2 балла;

   разобран случай, приводящий к ответу 1 или -1 . . . . 1 балл;

   разобран другой случай . . . . 2 балла.

   Внимание! В решении **НЕ** требуется доказывать, что случаи реализуются. За отсутствие доказательства баллы не снимаются.

3. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на одной из карточек единица . . . . . . 2 балла;

   найдено количество способов, когда карточка с единицей не используется . . . . 3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза . . . . не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 6 раз больше указанного в решении) . . . . баллы не снимаются;

   ответ не приведён к числовому . . . . баллы не снимать;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ . . . . 0 баллов за рассматриваемый случай;

   наличие единицы не считается особым случаем (вследствие чего наборы с 1 учтены дважды), и при этом всё остальное посчитано верно . . . . 3 балла за задачу.

4. **(6 баллов)** а) (2 балла) Доказано, что треугольник BCP равнобедренный и что PL – биссектриса угла APC . . . . 1 балл;

   б) (4 балла) найден отрезок PT . . . . 2 балла;

   найдена площадь треугольника ACP . . . . 2 балла.

5. **(6 баллов)** Нахождение ОДЗ отдельно не оценивается.

   За любое неэквивалентное на ОДЗ преобразование[1] . . . . 0 баллов за задачу;

[1]Под неэквивалентным преобразованием понимается любое недопустимое действие с неравенством (ниже приведены примеры таких действий):

неравенство преобразовано к виду $\frac{(\log_u w-1)(\log_u v-1)}{\log_u v} \leqslant 0$ или к виду $(\log_u w-1)(1-\log_v u) \leqslant 0$ 2 балла;

неравенство сведено к рациональному или системе рациональных неравенств ....1 балл;

ответ отличается от верного конечным количеством точек ....снять по 1 баллу за каждую лишнюю/недостающую точку, но не более трёх баллов;

ответ отличается от верного более чем на конечное число точек .. не более 3 баллов за задачу.

6. **(6 баллов)** Получены уравнения обеих окружностей ....1 балл;

составлено тригонометрическое уравнение в случае совпадения окружностей ....1 балл;

решено тригонометрическое уравнение в случае совпадения окружностей ....1 балл;

составлено тригонометрическое уравнение в случае пересечения окружностей ....1 балл;

решено тригонометрическое уравнение в случае пересечения окружностей ....2 балла.

7. **(7 баллов)** Доказано, что центр сферы является центром равностороннего треугольника из условия .... 2 балла;

найдена длина ребра из пункта а) ....1 балл;

за каждый из вопросов пункта б) .... по 2 балла.

– умножение обеих частей на выражение неизвестного знака,

– неверные формулы при работе с логарифмами (сумма логарифмов – это логарифм суммы и пр.),

– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$ или $\log_a b \geqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$,

– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant b$,

– если осуществляется переход от логарифмического неравенства к рациональному, и при этом не учитывается, что основания логарифмов переменные (т.е. нет ни метода рационализации, ни рассмотрения случаев, когда основание логарифма больше/меньше 1: например, выполнен переход от неравенства $\log_x(f(x)) < \log_x(g(x))$ к неравенству $f(x) < g(x)$).