Билет 3

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2-2ax+3$, $f_2(x)=x^2+x+b$, $f_3(x)=3x^2+(1-4a)x+6+b$ и $f_4(x)=3x^2+(2-2a)x+3+2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: $\frac{1}{3}$.

   Решение. Пусть $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2-x_1|=\left|\frac{-b+\sqrt{T}-(-b-\sqrt{T})}{2a}\right|=\frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A=\sqrt{4a^2-12},\ B=\sqrt{1-4b},\ C=\frac{1}{3}\sqrt{(1-4a)^2-12(6+b)},\ D=\frac{1}{3}\sqrt{(2-2a)^2-12(3+2b)}$$

   Отсюда следует, что $C^2-D^2=\frac{1}{9}\big((16a^2-8a-12b-71)-(4a^2-8a-24b-32)\big)=\frac{1}{3}\left(4a^2+4b-13\right)$, $A^2-B^2=4a^2+4b-13$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{3}$.

2. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения $f(x)=\sqrt{21-x^2-4x}$ и $g(x)=|x+2|$ определены, причём $\min(f(x);g(x))>\frac{x+4}{2}$.

   Ответ: $x\in\left[-7;-\frac{8}{3}\right)\cup(0;2)$.

   Решение. Обе функции определены при $21-x^2-4x\geqslant 0\Leftrightarrow -7\leqslant x\leqslant 3$. Заметим, что следующие два утверждения равносильны: “меньшее из двух чисел больше A” и “оба числа больше A”. Поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>\frac{x+4}{2},\\ g(x)>\frac{x+4}{2}.\end{cases}$$

   Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на области определения, оба неравенства системы выполняются при $\frac{x+4}{2}<0$, т.е. при $x<-4$, а с учётом ОДЗ – при $x\in[-7;-4)$. Если $x\geqslant-4$, то у обоих неравенств левые и правые части неотрицательны, и их возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$\begin{cases} 21-x^2-4x>\frac{x^2+8x+16}{4},\\ x^2+4x+4>\frac{x^2+8x+16}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+24x-68<0,\\ 3x^2+8x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{34}{5};2\right),\\ x\in\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right)\cup(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{34}{5};-\frac{8}{3}\right)\cup(0;2).$$

   Учитывая рассматриваемый промежуток $x\in[-4;+\infty)$, получаем $x\in\left[-4;-\frac{8}{3}\right)\cup(0;2)$. Объединяя результаты, окончательно находим, что $x\in\left[-7;-\frac{8}{3}\right)\cup(0;2)$.

3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\frac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\frac{144}{17}$.

   Ответ: $b_1=\pm3$, $q=\frac{1}{4}$.

   Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q|<1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

   Кубы членов данной прогрессии $\{b_n\}$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3, четвёртые степени членов – прогрессию с первым членом b_1^4 и знаменателем q^4, а квадраты – прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1^3}{1-q^3}$, $\frac{b_1^4}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2}{1-q^2}$.

   Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{b_1^3}{1-q^3}:\frac{b_1}{1-q}=\frac{48}{7},\\ \frac{b_1^4}{1-q^4}:\frac{b_1^2}{1-q^2}=\frac{144}{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b_1^2}{1+q+q^2}=\frac{48}{7},\\ \frac{b_1^2}{1+q^2}=\frac{144}{17}.\end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе и получаем $\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{17}{21} \Leftrightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0$, откуда $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q| < 1$, и подходит только значение $q = \frac{1}{4}$. Тогда $b_1^2 = \frac{144}{17}\left(1+q^2\right) = 9$ и $b_1 = \pm 3$.

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE = 9$, $ED = 7$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: $R = 6$, $S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}$.

Решение. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB и AD трапеции через K и W соответственно. По теореме о касательной и секущей $DW^2 = DE \cdot DC = 7 \cdot 16$, $DW = 4\sqrt{7}$. Так как C и W – точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD, отрезок CW есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDW находим, что $CW = \sqrt{16^2 - \left(4\sqrt{7}\right)^2} = 12$. Следовательно, радиус R окружности равен $\frac{1}{2}CW = 6$.

Пусть $BC = x$. Тогда $BK = x$ (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная, $AK = AB - BK = 16 - x$. Значит, $AW = AK = 16 - x$. Отсюда получаем, что сумма оснований есть $BC + AD = x + (4\sqrt{7} + 16 - x) = 16 + 4\sqrt{7}$, и площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \left(16 + 4\sqrt{7}\right) = 96 + 24\sqrt{7}$.

5. На столе лежат 140 различных карточек с числами $3, 6, 9, \ldots 417, 420$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

Ответ: 1390.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Следовательно, остатки от деления на 7 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 7, т.е. имеет вид $7k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следом за ним идут числа $7k+3$, $7k+6$, $7k+9 = 7(k+1)+2$, $7k+12 = 7(k+1)+5$, $7k+15 = 7(k+2)+1$, $7k+18 = 7(k+2)+4$, дающие при делении на 7 остатки 2, 4, 6, 1, 3, 5 соответственно. Далее идёт число $7k+21$, делящееся на 7, и затем остатки повторяются. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 7 идут в порядке $\ldots 0; 3; 6; 2; 5; 1; 4; 0 \ldots$.

Среди данных нам 140 чисел есть по 20 чисел, дающих остатки $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ от деления на 7.

Сумма двух чисел может делиться на 7 в следующих случаях.

1) Оба числа делятся на 7. Всего карточек с такими числами 20, и нужно выбрать 2 них – есть $C_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 = 190$ способов сделать это.

2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 7 – тогда второе должно давать остаток 6 от деления на 7. Эту пару чисел можно выбрать $20 \cdot 20 = 400$ способами.

3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 5, и, аналогично второму случаю, получаем 400 способов выбрать 2 числа.

4) Одно из чисел даёт остаток 3 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 4 – также 400 способов.

В итоге выходит 1390 способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x-1| + |5-x| \leqslant 4, \\ \frac{x^2-6x+2y+7}{y+x-4} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 4.

Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

1) $x < 1$. Тогда неравенство принимает вид $1 - x + 5 - x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. В этом случае решений нет.

2) $1 \leqslant x \leqslant 5$. Тогда получаем $x-1+5-x \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0$, что выполняется при всех значениях x из рассматриваемого промежутка.

3) $x>5$. Тогда $x-1+x-5 \leqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant 5$, т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что $x \in [1;5]$.

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой ℓ с уравнением $y=4-x$ (при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при $x^2-6x+2y+7=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$. Это множество точек есть парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $C(2;-1)$. Точки пересечения прямой и параболы можно определить из системы уравнений $\begin{cases} y=4-x, \\ x^2-6x+2y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x, \\ x^2-8x+15=0. \end{cases}$

Отсюда выходят две точки – $A(5;-1)$ и $C(3;1)$.

Второе неравенство выполняется:

– в точках параболы (кроме точек A и C);

– в точках ниже параболы и выше прямой (при этом числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– в точках выше параболы и ниже прямой (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Учитывая также ограничение $x \in [1;5]$ из первого неравенства, получаем, что множество M представляет собой совокупность двух множеств M_1 и M_2; первое из них есть криволинейный треугольник BCD, где $B(1;-1)$ и $D(1;3)$ – это точки пересечения прямой $x=1$ с параболой и прямой ℓ соответственно (его сторонами являются отрезки CD, BD и дуга параболы BC), а второе – область, ограниченная отрезком AC и дугой параболы AC (при этом все точки прямой AC не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой $x=3$) следует, что площадь фигуры M_3, ограниченной отрезком BC и дугой параболы BC, равна площади M_2. Но $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$, а площадь этого треугольника несложно найти: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

7. Окружности ω и Ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей ω и Ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность Ω в точке C, а также пересекает ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка H лежит между точками P и F). Известно, что $BC=60$, $DH=HC=2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP=8\sqrt{31}$, $r=6\sqrt{\frac{93}{5}}$, $R=2\sqrt{465}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC \cdot HB = 2 \cdot 62 \Rightarrow HF = 2\sqrt{31};$$

$$HF^2 = HD \cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 62;$$

$$BA^2 = BD \cdot BE = 64 \cdot 124 \Longrightarrow BA = 16\sqrt{31}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF=PA=PB$, следовательно, $PF=\frac{1}{2}AB=8\sqrt{31}$. Итак, $PH=PF-FH=6\sqrt{31}$. Пусть $\angle BPH=\gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2=BP^2+HP^2-2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $62^2=64\cdot31+36\cdot31-2\cdot6\cdot8\cdot31\cos\gamma$, откуда $31=16+9-24\cos\gamma$, $\cos\gamma=-\frac{1}{4}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы B и F четырёхугольника $OBPF$ прямые, поэтому $\angle BOF = 180^\circ - \angle BPF = 180^\circ - \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABOQ$. В ней $OQ=R+r$, $OB=R$, $AQ=r$, $AB=16\sqrt{31}$, $\angle BOQ = 180^\circ-\gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание BO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH=AB=16\sqrt{31}$, $OH=R-r$. По теореме Пифагора получаем

$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(16\sqrt{31}\right)^2$; кроме того, $\frac{1}{4} = \cos\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{5r}{3}$, а из первого следует, что $Rr = 64 \cdot 31$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 8\sqrt{\frac{155}{3}}$, $r = 8\sqrt{\frac{93}{5}}$.

Билет 4

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2-x+2a$, $f_2(x)=x^2+2bx+3$, $f_3(x)=4x^2+(2b-3)x+6a+3$ и $f_4(x)=4x^2+(6b-1)x+9+2a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2-x_1|=\left|\frac{-b+\sqrt{T}-(-b-\sqrt{T})}{2a}\right|=\frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A=\sqrt{1-8a},\ B=\sqrt{4b^2-12},\ C=\frac{1}{4}\sqrt{(2b-3)^2-16(6a+3)},\ D=\frac{1}{4}\sqrt{(6b-1)^2-16(9+2a)}$$

Отсюда следует, что $C^2-D^2=\frac{1}{16}\left(\left(4b^2-12b-96a-39\right)-\left(36b^2-12b-32a-143\right)\right)=\frac{1}{2}\left(13-8a-4b^2\right)$, $A^2-B^2=13-8a-4b^2$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{2}$.

2. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения $f(x)=\sqrt{16-x^2+6x}$ и $g(x)=|x-3|$ определены, причём $\min(f(x);g(x))>\frac{5-x}{2}$.

Ответ: $x\in(-1;1)\cup\left(\frac{11}{3};8\right]$.

Решение. Обе функции определены при $16-x^2+6x\geqslant 0\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 8$. Заметим, что следующие два утверждения равносильны: “меньшее из двух чисел больше A” и “оба числа больше A”. Поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>\frac{5-x}{2},\\ g(x)>\frac{5-x}{2}.\end{cases}$$

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на области определения, оба неравенства системы выполняются при $\frac{5-x}{2}<0$, т.е. при $x>5$, а с учётом ОДЗ – при $x\in(5;8]$. Если $x\leqslant 5$, то у обоих неравенств левые и правые части неотрицательны, и их возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$\begin{cases} 16-x^2+6x>\frac{x^2-10x+25}{4},\\ x^2-6x+9>\frac{x^2-10x+25}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5x^2-34x-39<0,\\ 3x^2-14x+11>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left(-1;\frac{39}{5}\right),\\ x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{11}{3};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup\left(\frac{11}{3};\frac{39}{5}\right).$$

Учитывая рассматриваемый промежуток $x\in(-\infty;5]$, получаем $x\in(-1;1)\cup\left(\frac{11}{3};5\right]$. Объединяя результаты, окончательно находим, что $x\in(-1;1)\cup\left(\frac{11}{3};8\right]$.

3. Известно, что отношение суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме кубов всех членов этой же прогрессии равно $\frac{1}{12}$, а отношение суммы четвёртых степеней всех членов к сумме квадратов всех членов этой прогрессии равно $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель указанной прогрессии.

Ответ: $b_1=\pm 3$, $q=-\frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q|<1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Кубы членов данной прогрессии $\{b_n\}$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3, четвёртые степени членов – прогрессию с первым членом b_1^4 и знаменателем q^4, а квадраты – прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1^3}{1-q^3}$, $\frac{b_1^4}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2}{1-q^2}$.

Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1^3}{1-q^3} : \frac{b_1}{1-q} = 12, \\ \frac{b_1^4}{1-q^4} : \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 12, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе и получаем $\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0$, откуда $q=-2$ или $q=-\frac{1}{2}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q|<1$, и подходит только значение $q=-\frac{1}{2}$. Тогда $b_1^2 = \frac{36}{5}\left(1+q^2\right) = 9$ и $b_1 = \pm 3$.

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE=7$, $ED=9$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: $R=2\sqrt{7}$, $S_{ABCD}=56\sqrt{7}$.

Решение. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB и AD трапеции через K и W соответственно. По теореме о касательной и секущей $DW^2 = DE \cdot DC = 9 \cdot 16$, $DW=12$. Так как C и W – точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD, отрезок CW есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDW находим, что $CW = \sqrt{16^2-12^2} = 4\sqrt{7}$. Следовательно, радиус R окружности равен $\frac{1}{2}CW = 2\sqrt{7}$.

Пусть $BC=x$. Тогда $BK=x$ (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная, $AK=AB-BK=16-x$. Значит, $AW=AK=16-x$. Отсюда получаем, что сумма оснований есть $BC+AD = x+(28-x)=28$, и площадь трапеции равна $\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{7}\cdot 28 = 56\sqrt{7}$.

5. На столе лежат 210 различных карточек с числами $2, 4, 6, \ldots 418, 420$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

Ответ: 3135.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 7 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 7, т.е. имеет вид $7k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следом за ним идут числа $7k+2$, $7k+4$, $7k+6$, $7k+8 = 7(k+1)+1$, $7k+10=7(k+1)+3$, $7k+12=7(k+1)+5$, дающие при делении на 7 остатки 2, 4, 6, 1, 3, 5 соответственно. Далее идёт число $7k+14$, делящееся на 7, и затем остатки повторяются. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 7 идут в порядке $\ldots 0; 2; 4; 6; 1; 3; 5; 0 \ldots$.

Среди данных нам 210 чисел есть по 30 чисел, дающих остатки $0,1,2,3,4,5,6$ от деления на 7.

Сумма двух чисел может делиться на 7 в следующих случаях.

1) Оба числа делятся на 7. Всего карточек с такими числами 30, и нужно выбрать 2 них – есть $C_{30}^2 = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 29 = 435$ способов сделать это.

2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 7 – тогда второе должно давать остаток 6 от деления на 7. Эту пару чисел можно выбрать $30 \cdot 30 = 900$ способами.

3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 5, и, аналогично второму случаю, получаем 900 способов выбрать 2 числа.

4) Одно из чисел даёт остаток 3 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 4 – также 900 способов.

В итоге выходит 3135 способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y|+|4-y| \leqslant 4, \\ \frac{y^2+x-4y+1}{2y+x-7} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

1) $y < 0$. Тогда неравенство принимает вид $-y + 4 - y \leqslant 4 \Leftrightarrow y \geqslant 0$. В этом случае решений нет.

2) $0 \leqslant y \leqslant 4$. Тогда получаем $y + 4 - y \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0$, что выполняется при всех значениях y из рассматриваемого промежутка.

3) $y > 4$. Тогда $y - 4 + y \leqslant 4 \Leftrightarrow y \leqslant 4$, т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что $y \in [0; 4]$.

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой $x = 7 - 2y$ (назовём её ℓ; при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при $x + y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -(y-2)^2 + 3$. Это множество точек есть парабола с ветвями влево и вершиной в точке $C(3; 2)$. Заметим, что парабола и прямая пересекают ось абсцисс в точках $B(-1; 0)$ и $D(7; 0)$ соответственно. Точки пересечения прямой ℓ и параболы можно определить из системы уравнений $\begin{cases} x = 7 - 2y, \\ x = -y^2 + 4y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y, \\ y^2 - 6y + 8 = 0. \end{cases}$

Отсюда выходят две точки – $A(-1; 4)$ и $C(3; 2)$.

Второе неравенство выполняется:

– в точках параболы (кроме точек A и C);

– в точках справа от параболы и выше прямой (при этом и числитель, и знаменатель дроби положительны);

– в точках слева от параболы и ниже прямой (и числитель, и знаменатель дроби отрицательны).

Учитывая также ограничение $y \in [-4; 0]$ из первого неравенства, получаем, что множество M представляет собой совокупность двух множеств M_1 и M_2; первое из них есть криволинейный треугольник BCD (его сторонами являются отрезки CD, BD и дуга параболы BC), а второе – область, ограниченная отрезком AC и дугой параболы AC (при этом все точки прямой AC не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой $y = 2$) следует, что площадь фигуры M_3, ограниченной отрезком BC и дугой параболы BC, равна площади M_2. Но $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$, а площадь этого треугольника несложно найти: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$.

7. Окружности ω и Ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей ω и Ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность Ω в точке C, а также пересекает ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка H лежит между точками P и F). Известно, что $DE = 18$, $DH = HC = 3$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = 3\sqrt{7}$, $r = 2\sqrt{21}$, $R = 6\sqrt{21}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HD \cdot HE = 3 \cdot 21 \Rightarrow HF = 3\sqrt{7};$$
$$HF^2 = HC \cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = 21;$$
$$BA^2 = BD \cdot BE = 24 \cdot 42 \Longrightarrow BA = 12\sqrt{7}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{7}$. Итак, $PH = PF - FH = 3\sqrt{7}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP \cdot PH \cdot \cos\gamma$, т.е. $21^2 = 36 \cdot 7 + 9 \cdot 7 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cos\gamma$, откуда $7 = 4 + 1 - 4\cos\gamma$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы B и F четырёхугольника $OBPF$ прямые, поэтому $\angle BOF = 180^\circ - \angle BPF = 180^\circ - \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABOQ$. В ней $OQ = R + r$, $OB = R$, $AQ = r$, $AB = 12\sqrt{7}$, $\angle BOQ = 180^\circ - \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание BO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 12\sqrt{7}$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(12\sqrt{7}\right)^2$; кроме того, $\frac{1}{2} = \cos\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = 3r$, а из первого следует, что $Rr = 252$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 6\sqrt{21}$, $r = 2\sqrt{21}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Выведена или указана формула для модуля разности между корнями уравнения 1 балл.

2. **(6 баллов)** Выполнен переход от неравенства с минимумом к системе двух неравенств 2 балла;

   решено иррациональное неравенство . . . . 2 балла;

   решено неравенство с модулем . . . . 1 балл;

   получен окончательный ответ (пересечены множества решений двух неравенств) . . . . . . 1 балл;

   не учтена область определения квадратного корня . . . не более 4 баллов за задачу: снимается 1 балл за решение иррационального неравенства и 1 балл за пересечение множеств;

   при решении иррационального неравенства обе его части возведены в квадрат без учёта знака правой части . . . . не более 3 баллов за задачу: не ставятся баллы за решение иррационального неравенства и за пересечение множеств.

   При другом способе решения. Исследовано, при каких значениях x какая из функций больше 1 балл;

   решено иррациональное неравенство . . . . 2 балла;

   решено неравенство с модулем . . . . 1 балл;

   получен окончательный ответ . . . . 2 балла;

   не учтена область определения квадратного корня . . . не более 3 баллов за задачу: снимается 1 балл за решение иррационального неравенства и 2 балла за пересечение множеств;

   при решении иррационального неравенства обе его части возведены в квадрат без учёта знака правой части . . . . не более 2 баллов за задачу: не ставятся баллы за решение иррационального неравенства и за пересечение множеств.

3. **(5 баллов)** Составлена система уравнений относительно первого члена прогрессии и её знаменателя . . . . 2 балла;

   не обосновано, что знаменатель прогрессии отличен от единицы . . . . баллы не снимать;

   в ответ включено значение знаменателя, модуль которого больше единицы . . . . . снять 2 балла;

   потеряно одно из двух значений первого члена прогрессии . . . . снять 1 балл.

4. **(4 балла)** Найден радиус окружности . . . . 2 балла;

   найдена площадь трапеции . . . . 2 балла.

5. **(5 баллов)** Посчитано количество чисел, дающих остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при делении на 7 1 балл;

   найдено количество способов, когда остатки различны . . . . 2 балла;

   найдено количество способов, когда оба остатка одинаковы . . . . 2 балла;

неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев (или учтены не все случаи) .. не более 3 баллов за задачу;

если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай;

ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать.

6. **(6 баллов)** Построено множество точек .... 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) .... снять 1 балл;

   найдена площадь фигуры .... 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

   За неполное построение множества возможны частичные баллы:

   определено множество решений первого неравенства .... 1 балл;

   построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль .... 1 балл;

   определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству ..... 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).

7. **(7 баллов)** Найден отрезок HF .... 1 балл;

   найден отрезок AB .... 1 балл;

   найден отрезок HP .... 1 балл;

   найдены радиусы окружностей .... 4 балла.

Билет 11

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2-1$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)+3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2-1$ и $y=f(x)+1$.

   Ответ: $\sqrt{38}$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2-1=ax+b$, а во втором случае – из уравнения $x^2=ax+b+3$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2-ax-(b+1)=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b+4}}{2}$, $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b+4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2-x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+12)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}(a^2+1)(a^2+4b+4)=30,\\(a^2+1)(a^2+4b+12)=46,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2=1$, $b=\frac{5}{2}$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2-ax-b-2=0$, поэтому $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b+8}=\sqrt{19}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2-x_1|\sqrt{a^2+1}=\sqrt{19}\sqrt{2}=\sqrt{38}$.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-\sqrt[6]{4x^2}}{(x^2-4|x|)^2-8x^2+32|x|-48}\geqslant 0$.

   Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup[-4;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4]\cup(6;+\infty)$.

   Решение. Рассмотрим знаменатель дроби. Его можно записать в виде $\left(x^2-4|x|\right)^2-8\left(x^2-4|x|\right)-48$, или, если обозначить $x^2-4|x|=t$, в виде $t^2-8t-48=(t-12)(t+4)$. Если вернуться обратно к переменной x, выходит выражение $\left(x^2-4|x|-12\right)\left(x^2-4|x|+4\right)=(|x|-6)(|x|+2)(|x|-2)^2$. Итак, исходное неравенство равносильно следующему

   $$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-\sqrt[3]{2|x|}}{(|x|-6)(|x|+2)(|x|-2)^2}\geqslant 0 \qquad (1)$$

   .

   В последнем неравенстве необходимо сравнить дробь с нулём, или, что то же самое, определить знак этой дроби. Это означает, что если мы заменим числитель или любой из множителей в знаменателе выражением того же знака, то получим неравенство, равносильное исходному. Заметим, что знак выражения $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ совпадает со знаком выражения $a-b$ при любых a и b; выражение $|a|-b$ при $b<0$ положительно, а при $b>0$ его знак совпадает со знаком выражения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Следовательно, неравенство (1) равносильно следующему

   $$\frac{\frac{x^2}{2}-2|x|}{\left(x^2-36\right)\left(x^2-4\right)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{|x|(|x|-4)}{\left(x^2-36\right)\left(x^2-4\right)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{x^2(x-4)(x+4)}{(x-6)(x+6)(x-2)^2(x+2)^2}\geqslant 0.$$

   Метод интервалов, применённый к последнему неравенству, даёт $x\in(-\infty;-6)\cup[-4;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4]\cup(6;+\infty)$.

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

   Ответ: $b_1=3$, $q=\frac{1}{2}$.

   Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q|<1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Все члены данной прогрессии $\{b_n\}$ с нечётными номерами также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q^2, а все члены с чётными номерами – геометрическую прогрессию с первым членом $b_2 = b_1q$ и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1}{1-q^2}$ и $\frac{b_1q}{1-q^2}$.

Квадраты членов прогрессии на нечётных местах и на чётных местах также образуют геометрические прогрессии с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 и с первым членом $b_2^2 = b_1^2q^2$ и знаменателем q^4 соответственно. Их суммы равны $\frac{b_1^2}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2q^2}{1-q^4}$. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} - \frac{b_1q}{1-q^2} = 2, \\ \frac{b_1^2}{1-q^4} - \frac{b_1^2q^2}{1-q^4} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1(1-q)}{(1-q)(1+q)} = 2, \\ \frac{b_1^2(1-q^2)}{(1-q^2)(1+q^2)} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1+q} = 2, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат, а затем делим почленно второе уравнение на первое. Получаем $\frac{1+2q+q^2}{1+q^2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$, откуда $q = 2$ или $q = \frac{1}{2}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q| < 1$, и подходит только значение $q = \frac{1}{2}$. Тогда $b_1 = 2(1+q) = 3$.

4. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

Ответ: $\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 12$, $AN = ND = 5$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 12$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 5$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = ON - OM = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на основание BC. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $BH = \frac{AD+BC}{2} = 17$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупровизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 26$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = 169 \sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\psi = 338 \sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{169 \sin\psi}{338 \sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 17$. Аналогично первому случаю находим, что $BH = 17$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 17\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi = 289 \sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\varphi = 338 \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{289 \sin\varphi}{338 \sin\varphi} = \frac{289}{338}$.

5. Есть 200 различных карточек с числами $2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{100}, 3^{100}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

Ответ: 4389.

Решение. Чтобы получить куб натурального числа, необходимо и достаточно чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в степени, кратной 3.

Допустим, выбраны две карточки со степенями двойки. У нас есть 33 показателя, делящиеся на 3 $(3, 6, 9, \ldots, 99)$, 34 показателя, дающие остаток 1 от деления на 3 $(1, 4, 7, \ldots, 100)$, 33 показателя, дающие остаток 2 от деления на 3 $(2, 5, 8, \ldots, 98)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась кратна 3. Чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 3, мы можем либо выбрать два числа делящиеся на 3 $\left(C_{33}^2 = \frac{33 \cdot 32}{2} = 528 \text{ способов}\right)$, либо взять одно число, дающее остаток 1 от деления на 3, и одно число, дающее остаток 2 от деления на 3 $(34 \cdot 33 = 1122 \text{ способа})$. Получаем $528 + 1122 = 1650$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени тройки, точно такое же, т.е. 1650.

Если взята одна карточка со степенью двойки и одна карточка со степенью тройки, то оба показателя должны делиться на 3 – получаем $33 \cdot 33 = 1089$ способов.

Итого: $1650 + 1650 + 1089 = 4389$ способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x \geqslant |x + y|, \\ \frac{x^2+8x+y^2+6y}{2y-x-8} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 8.

Решение. Первое неравенство равносильно[1] системе $\begin{cases} x + y \leqslant y - x, \\ x + y \geqslant x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x+4)^2+(y+3)^2-25}{2y-x-8} \leqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(-4; -3)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = 4 + \frac{x}{2}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x^2 + 8x + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8, \\ (2y - 8)^2 + 8(2y - 8) + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8, \\ y^2 - 2y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(-4; 2)$ и $B(-8; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; 4)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– вне окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося сверху от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный выше хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному выше хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 4$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 3, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = \frac{4}{3}$, $PT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3$, $S_{\triangle APC} = \frac{128\sqrt{5}}{87}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$.

[1] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 2$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+4} = \frac{1}{4}$, $y = \frac{4}{3}$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 9 - 4 = 5$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = \frac{100}{9} + 5 = \frac{145}{9}$. Следовательно, $PT = PO - OT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \sqrt{5} : \frac{\sqrt{145}}{3} = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{12\sqrt{5}}{29}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{12\sqrt{5}}{29} = \frac{128\sqrt{5}}{87}$.

Билет 12

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $3\sqrt{14}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 1 = ax + b + 1$, а во втором случае – из уравнения $x^2 = ax + b + 3$.

Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b + 2) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+8}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2 + 1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b + 8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b + 12)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} \left(a^2 + 1\right)\left(a^2 + 4b + 8\right) = 90, \\ \left(a^2 + 1\right)\left(a^2 + 4b + 12\right) = 126, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 8$, $b = -\frac{3}{2}$.

Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b} = \sqrt{2}$, а расстояние между самими точками пересечения есть

$|x_2 - x_1|\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt[6]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{(x^2-2|x|)^2+4|x|-2x^2-3} \leqslant 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2] \cup (3; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим знаменатель дроби. Его можно записать в виде $\left(x^2 - 2|x|\right)^2 - 2\left(x^2 - 2|x|\right) - 3$, или, если обозначить $x^2 - 2|x| = t$, в виде $t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1)$. Если вернуться обратно к переменной x, выходит выражение $\left(x^2 - 2|x| - 3\right)\left(x^2 - 2|x| + 1\right) = (|x| - 3)(|x| + 1)(|x| - 1)^2$. Итак, исходное неравенство равносильно следующему

$$\frac{\sqrt[3]{2|x|} - \sqrt[3]{x^2}}{(|x| - 3)(|x| + 1)(|x| - 1)^2} \leqslant 0 \qquad (2)$$

.

В последнем неравенстве необходимо сравнить дробь с нулём, или, что то же самое, определить знак этой дроби. Это означает, что если мы заменим числитель или любой из множителей в знаменателе выражением того же знака, то получим неравенство, равносильное исходному. Заметим, что знак выражения $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ совпадает со знаком выражения $a - b$ при любых a и b; выражение $|a| - b$ при $b < 0$ положительно, а при $b > 0$ его знак совпадает со знаком выражения $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Следовательно, неравенство (2) равносильно следующему

$$\frac{2|x| - x^2}{\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{|x|(|x| - 2)}{\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)(x - 1)^2(x + 1)^2} \geqslant 0.$$

Метод интервалов, применённый к последнему неравенству, даёт

$x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2] \cup (3; +\infty)$.

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 10 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна 20. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Все члены данной прогрессии $\{b_n\}$ с нечётными номерами также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q^2, а все члены с чётными номерами – геометрическую прогрессию с первым членом $b_2 = b_1 q$ и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1}{1-q^2}$ и $\frac{b_1 q}{1-q^2}$.

Квадраты членов прогрессии на нечётных местах и на чётных местах также образуют геометрические прогрессии с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 и с первым членом $b_2^2 = b_1^2 q^2$ и знаменателем q^4 соответственно. Их суммы равны $\frac{b_1^2}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2 q^2}{1-q^4}$. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} - \frac{b_1 q}{1-q^2} = 10, \\ \frac{b_1^2}{1-q^4} - \frac{b_1^2 q^2}{1-q^4} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1(1-q)}{(1-q)(1+q)} = 10, \\ \frac{b_1^2(1-q^2)}{(1-q^2)(1+q^2)} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1+q} = 10, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = 20. \end{cases}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат, а затем делим почленно второе уравнение на первое. Получаем $\frac{1+2q+q^2}{1+q^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0$, откуда $q = -2$ или $q = -\frac{1}{2}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q| < 1$, и подходит только значение $q = -\frac{1}{2}$. Тогда $b_1 = 10(1+q) = 5$.

4. В окружность Ω радиуса 17 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 30$, $BC = 16$.

Ответ: $\frac{529}{578}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 8$, $AN = ND = 15$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 8$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 15$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $AH = \frac{AD+BC}{2} = 23$. Тогда $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупровизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 34$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\psi = 289 \sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 34 \sin\psi = 578 \sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{289 \sin\psi}{578 \sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 23$. Аналогично первому случаю находим, что $AH = 23$, $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 23\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\varphi = 529 \sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 34 \sin\varphi = 578 \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{529 \sin\varphi}{578 \sin\varphi} = \frac{529}{578}$.

5. Есть 100 различных карточек с числами $2, 5, 2^2, 5^2, \ldots, 2^{50}, 5^{50}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

Ответ: 1074.

Решение. Чтобы получить куб натурального числа, необходимо и достаточно чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в степени, кратной 3.

Допустим, выбраны две карточки со степенями двойки. У нас есть 16 показателей, делящиеся на 3 $(3, 6, 9, \ldots, 48)$, 17 показателей, дающих остаток 1 от деления на 3 $(1, 4, 7, \ldots, 49)$, 17 показателей, дающих остаток 2 от деления на 3 $(2, 5, 8, \ldots, 50)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась кратна 3. Чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 3, мы можем либо выбрать два числа делящиеся на 3 $\left(C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ способов}\right)$, либо взять одно число, дающее остаток 1 от деления на 3, и одно число, дающее остаток 2 от деления на 3 $(17 \cdot 17 = 289 \text{ способов})$. Получаем $120 + 289 = 409$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени пятёрки, точно такое же, т.е. 409.

Если взята одна карточка со степенью двойки и одна карточка со степенью пятёрки, то оба показателя должны делиться на 3 – получаем $16 \cdot 16 = 256$ способов.

Итого: $409 + 409 + 256 = 1074$ способа.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + y + |x - y| \leqslant 0, \\ \frac{x^2+6x+y^2-8y}{x+3y+6} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 3.

Решение. Первое неравенство равносильно[2] системе $\begin{cases} x - y \leqslant -x - , \\ x - y \geqslant x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x+3)^2+(y-4)^2-25}{x+3y+6} \geqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(-3; 4)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = -2 - \frac{x}{3}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = -3y - 6, \\ x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 6, \\ (3y + 6)^2 - 6(3y + 6) + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 6, \\ y^2 + y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(-3; -1)$ и $B(-6; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; -2)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель и знаменатель отрицательны);

– вне окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель и знаменатель положительны).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося снизу от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный ниже хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному ниже хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 6. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 4. Пусть T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 6$, $PT = 2\sqrt{22} - 4$, $S_{\triangle APC} = \frac{81\sqrt{7}}{11}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому

[2] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

$PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 3$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+6} = \frac{1}{2}$, $y = 6$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 16 - 9 = 7$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 9^2 + 7 = 88$. Следовательно, $PT = PO - OT = \sqrt{88} - 4$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \sqrt{7} : \sqrt{88} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{22}}$, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{9}{2\sqrt{22}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{9\sqrt{7}}{44}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{9\sqrt{7}}{44} = \frac{81\sqrt{7}}{11}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов .... 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты .... 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс .... 0 баллов за задачу.

2. **(5 баллов)** потерян модуль при переходе от корня шестой степени к кубическому корню *ИЛИ* при раскрытии модуля по определению не учитываются условия $x \geqslant 0$ $(x < 0)$ .... не более 1 балла за задачу (который может быть получен за разложение знаменателя на множители);

   если используется метод знакоэквивалентных множителей, то за переход к рациональному неравенству .... 3 балла;

   знаменатель разложен на линейные множители относительно $|x|$, а других продвижений нет 1 балл за задачу;

   ответ отличается от верного конечным числом точек .... снять 1 балл

   неэквивалентное преобразование неравенства не более 1 балла за задачу (который может быть получен за разложение знаменателя на множители).

3. **(5 баллов)** Составлена система уравнений относительно первого члена прогрессии и её знаменателя .... 2 балла;

   не обосновано, что знаменатель прогрессии отличен от единицы .... баллы не снимать;

   в ответ включено значение знаменателя, модуль которого больше единицы ..... снять 2 балла.

4. **(5 баллов)** Полностью рассмотрен только один из двух возможных случаев .... 3 балла;

   промежуточные оценки в случае отсутствия полного решения (ставятся только один раз, даже если вычисления проведены верно в обоих случаях):

   – найдена площадь трапеции .... 1 балл;

   – найден угол между диагоналями прямоугольника .... 1 балл.

5. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на карточках степени разных простых чисел 2 балла;

   найдено количество способов, когда на карточках степени одного простого числа ..... 3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза .... не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать;

если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт (например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай.

6. **(6 баллов)** Построено множество точек .... 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) .... снять 1 балл;

   найдена площадь фигуры .... 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

   За неполное построение множества возможны частичные баллы:

   определено множество решений первого неравенства .... 1 балл;

   построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль .... 1 балл;

   определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству ..... 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).

7. **(6 баллов)** а) (2 балла) Доказано, что треугольник BCP равнобедренный и что PL – биссектриса угла APC .... 1 балл;

   б) (4 балла) найден отрезок PT .... 2 балла;

   найдена площадь треугольника ACP .... 2 балла.