

## 9 класс

БИЛЕТ 7

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до 60 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?
2. Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции  $(g(x))^2 + f(x)$ , если наименьшее значение функции  $(f(x))^2 + g(x)$  равно  $-6$ .
3. Уравнение  $x^2 + ax + 6 = 0$  имеет два различных корня  $x_1$  и  $x_2$ ; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения  $a$ .

4. На каждой из прямых  $y = 3$  и  $y = 4$  отмечено по 73 точки с абсциссами  $1, 2, 3, \dots, 73$ . Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
5. На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  за точку  $A$  отмечена точка  $T$  такая, что  $\angle BAC = 2\angle BTC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = AC$ ,  $BT = 70$ ,  $AT = 37$ .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа  $b$  равна 748. Найдите все возможные значения  $a$ , если известно, что  $a + b = 62,5$ .
7. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Пусть  $P$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ , а  $Q$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $CBD$ . Луч  $BP$  пересекает сторону  $DA$  в точке  $M$ , а луч  $DQ$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $N$ . Оказалось, что  $AM = \frac{9}{7}$ ,  $DM = \frac{12}{7}$  и  $BN = \frac{20}{9}$ ,  $CN = \frac{25}{9}$ .
  - а) Найдите отношение  $AB : CD$ .
  - б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ .

## 9 класс

БИЛЕТ 8

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до 80 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?
2. Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции  $(g(x))^2 + f(x)$ , если наименьшее значение функции  $(f(x))^2 + g(x)$  равно 4.
3. Уравнение  $x^2 + ax + 8 = 0$  имеет два различных корня  $x_1$  и  $x_2$ ; при этом

$$x_1 - \frac{64}{17x_2^3} = x_2 - \frac{64}{17x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения  $a$ .

4. На каждой из прямых  $x = 5$  и  $x = 6$  отмечено по 58 точек с ординатами  $1, 2, 3, \dots, 58$ . Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 116 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
5. На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  за точку  $A$  отмечена точка  $T$  такая, что  $\angle BAC = 2\angle BTC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = AC$ ,  $BT = 42$ ,  $AT = 29$ .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двенадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 358, а сумма расстояний от этих же двенадцати чисел до некоторого числа  $b$  равна 212. Найдите все возможные значения  $a$ , если известно, что  $a + b = 114,5$ .
7. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Пусть  $P$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ , а  $Q$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $CBD$ . Луч  $BP$  пересекает сторону  $DA$  в точке  $M$ , а луч  $DQ$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $N$ . Оказалось, что  $AM = \frac{8}{3}$ ,  $DM = \frac{4}{3}$  и  $BN = \frac{6}{5}$ ,  $CN = \frac{9}{5}$ .
  - а) Найдите отношение  $AB : CD$ .
  - б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ .

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

БИЛЕТ 15

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны 6000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 6000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?
2. Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции  $y = (f(x))^2$  касается графика функции  $y = 20g(x)$ . Найдите все значения  $A$  такие, что график функции  $y = (g(x))^2$  касается графика функции  $y = \frac{f(x)}{A}$ .
3. Уравнение  $x^2 + ax + 3 = 0$  имеет два различных корня  $x_1$  и  $x_2$ ; при этом

$$x_1^3 - \frac{39}{x_2} = x_2^3 - \frac{39}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения  $a$ .

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 3 с *натуральными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят  $27^{45}$ .
5. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $PQR$ , касается его сторон  $PQ$ ,  $QR$  и  $RP$  в точках  $C$ ,  $A$  и  $B$  соответственно. Прямые  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $PQ$  и  $PR$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найдите отношение  $QA : AR$ , если  $KQ = 3$ ,  $QR = 16$ ,  $LR = 1$ .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тринадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 260, а сумма расстояний от этих же тринадцати чисел до числа  $a^2$  равна 1768. Найдите все возможные значения  $a$ .
7. В окружность вписан четырехугольник  $KLMN$  с диагоналями  $KM$  и  $LN$ , которые пересекаются в точке  $T$ . Основания перпендикуляров, опущенных из точки  $T$  на стороны четырехугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки  $T$  до сторон  $KL$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NK$  равны  $4\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{8}{\sqrt{17}}$  и  $\frac{8}{\sqrt{17}}$  соответственно.
  - а) Найдите отношение  $KT : TM$ .
  - б) Найдите длину диагонали  $LN$ , если дополнительно известно, что  $KM = 10$ .

## 9 класс

БИЛЕТ 16

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны 5000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 5000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?
2. Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции  $y = (f(x))^2$  касается графика функции  $y = -50g(x)$ . Найдите все значения  $A$  такие, что график функции  $y = (g(x))^2$  касается графика функции  $y = \frac{f(x)}{A}$ .
3. Уравнение  $x^2 + ax - 2 = 0$  имеет два различных корня  $x_1$  и  $x_2$ ; при этом

$$x_1^3 + \frac{22}{x_2} = x_2^3 + \frac{22}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения  $a$ .

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 5 с *натуральными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят  $125^{48}$ .
5. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $PQR$ , касается его сторон  $PQ$ ,  $QR$  и  $RP$  в точках  $C$ ,  $A$  и  $B$  соответственно. Прямые  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $PQ$  и  $PR$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найдите отношение  $QA : AR$ , если  $KQ = 1$ ,  $QR = 11$ ,  $LR = 2$ .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двенадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 3306, а сумма расстояний от этих же двенадцати чисел до числа  $a^2$  равна 1734. Найдите все возможные значения  $a$ .
7. В окружность вписан четырехугольник  $KLMN$  с диагоналями  $KM$  и  $LN$ , которые пересекаются в точке  $T$ . Основания перпендикуляров, опущенных из точки  $T$  на стороны четырехугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки  $T$  до сторон  $KL$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NK$  равны  $5\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{\frac{2}{13}}$  и  $5\sqrt{\frac{2}{13}}$  соответственно.
  - а) Найдите отношение  $KT : TM$ .
  - б) Найдите длину диагонали  $LN$ , если дополнительно известно, что  $KM = 12$ .