Онлайн тур олимпиады «Физтех» 2017-2018

11 класс

1. Две параболы param1 и param2 касаются в точке, лежащей на оси Ox. Через точку D – вторую точку пересечения первой параболы с осью Ox – проведена вертикальная прямая, пересекающая вторую параболу в точке A, а общую касательную к параболам – в точке B. Найдите отношение $DA : DB$.

param1	param2	
$y = x^2 + ax + b$	$y = -3x^2 + cx + d$	
$y = 2x^2 + ax + b$	$y = -5x^2 + cx + d$	
$y = x^2 + ax + b$	$y = -6x^2 + cx + d$	
$y = 2x^2 + ax + b$	$y = -3x^2 + cx + d$	

2. Внутри острого угла ABC взяты точки M и N так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$, $AM \perp BM$ и $AN \perp BN$. Прямая MN пересекает луч BC в точке K. Найдите BN, если param1.

param1	
$BM = 24,\ BK = 3$	
$BM = 18,\ BK = 7$	
$BM = 50,\ BK = 14$	
$BM = 25,\ BK = 7$	

3. Найдите количество целочисленных решений $(a; b; c)$ уравнения param1, удовлетворяющих условию param2.

param1	param2	
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 33750$	$\lvert a+b+c \rvert \le 120$	
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 506250$	$\lvert a+b+c \rvert < 91$	
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 15000$	$\lvert a+b+c \rvert \le 250$	
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 225000$	$\lvert a+b+c \rvert < 113$	

4. Дана последовательность $y_n = n(n+1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами k и l (param1) делится на param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $l+k$.

param1	param2	
$l<100<k$	3^{10}	
$l<115<k$	3^{11}	
$l<125<k$	3^{11}	
$l<157<k$	3^{12}	

5. Известно, что для всех пар положительных чисел (x; y), для которых выполняется равенство $x+y=$param1 и неравенство $x^2+y^2>$param2, выполняется и неравенство $x^5+y^5>m$. Какое **наибольшее** значение может принимать m?

param1	param2	
5	13	
7	27	
6	25	
8	35	
9	43	

6. В правильный тетраэдр $KLMN$ с ребром param1 вписана сфера Ω. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что его диагональ A_1C_1 лежит на прямой KL, а прямая BD касается сферы Ω в точке, лежащей на отрезке BD. Какую **наименьшую** площадь поверхности может иметь куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Ответ округлите до десятых.

param1	
$3\sqrt{2}$	
$3\sqrt{7}$	
$6\sqrt{3}$	
$9\sqrt{5}$	

7. Известно, что число a удовлетворяет уравнению param1, а число b – уравнению param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $a+b$.

param1	param2	
$x^3-3x^2+5x-17=0$	$x^3-6x^2+14x+2=0$	
$x^3+3x^2+6x-9=0$	$x^3+6x^2+15x+27=0$	
$x^3-6x^2+16x-28=0$	$x^3+3x^2+7x+17=0$	
$x^3+6x^2+17x+7=0$	$x^3-3x^2+8x+5=0$	

8. Найдите наибольшее значение выражения param1, если числа x, y, z являются решениями системы param2. Ответ округлите до тысячных.

param1	param2	
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{8}{9}+\sin x}=\frac{3}{2}\cos y+\frac{1}{3}\operatorname{tg} y \\ \sqrt{\frac{8}{9}+\sin y}=\frac{3}{2}\cos z+\frac{1}{3}\operatorname{tg} z \\ \sqrt{\frac{8}{9}+\sin z}=\frac{3}{2}\cos x+\frac{1}{3}\operatorname{tg} x \end{cases}$	
$\cos(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{21}{25}+\cos x}=\frac{5}{4}\sin y+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} y, \\ \sqrt{\frac{21}{25}+\cos y}=\frac{5}{4}\sin z+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} z, \\ \sqrt{\frac{21}{25}+\cos z}=\frac{5}{4}\sin x+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} x. \end{cases}$	
$\cos(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{5}{9}+\cos x}=\frac{3}{4}\sin z+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} z, \\ \sqrt{\frac{5}{9}+\cos y}=\frac{3}{4}\sin x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x, \\ \sqrt{\frac{5}{9}+\cos z}=\frac{3}{4}\sin y+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} y. \end{cases}$	
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{15}{16}-\sin x}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} y-2\cos y, \\ \sqrt{\frac{15}{16}-\sin y}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} z-2\cos z, \\ \sqrt{\frac{15}{16}-\sin z}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-2\cos x. \end{cases}$	
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{24}{25}-\sin x}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} z-\frac{5}{2}\cos z, \\ \sqrt{\frac{24}{25}-\sin y}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} x-\frac{5}{2}\cos x, \\ \sqrt{\frac{24}{25}-\sin z}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} y-\frac{5}{2}\cos y. \end{cases}$	

9. На столе лежит param1 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно param2 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

param1	param2	
120	60	

17. Известно, что число a удовлетворяет уравнению param1, а число b – уравнению param2. Найдите **наибольшее** возможное значение суммы $a+b$.

param1	param2	
$x^3-3x^2+5x-17=0$	$x^3-3x^2+5x+11=0$	
$x^3+3x^2+6x-9=0$	$x^3+3x^2+6x+17=0$	
$x^3-6x^2+16x-28=0$	$x^3-6x^2+16x-4=0$	
$x^3+6x^2+17x+7=0$	$x^3+6x^2+17x+29=0$	

18. Дана последовательность $x_n = n(n+1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами k и l (param1) делится на param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $l+k$.

param1	param2	
$l<70<k$	5^8	
$l<150<k$	5^9	
$l<350<k$	5^9	
$l<415<k$	5^{10}	

19. В футбольном турнире, проходящем в один круг (каждая команда должны сыграть с каждой ровно по одному разу), играют N команд. В некоторый момент турнира тренер команды A заметил, что любые две команды, отличные от A, сыграли разное количество игр. Также известно, что к этому моменту команда A сыграла param1 игр. Какое количество N команд могло участвовать в этом турнире? В ответ запишите сумму всех возможных значений N.

param1	
10	
11	
12	
13	
15	

20. На столе лежит param1 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно param2 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

param1	param2	
105	53	

150	75	
160	80	
210	105	
220	110	

10. Во время опроса param1 человек каждому из них предлагалось указать один любимый фильм. Оказалось, что из любых 10 опрошенных по крайней мере 3 указали один и тот же фильм. При каком наибольшем *M* можно утверждать, что среди опрошенных обязательно найдутся *M* человек, указавших один и тот же фильм?

param1	
64	
72	
76	
88	