МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-3x+2)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2+2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2+2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

3. На каждой из прямых $y=1$ и $y=6$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1,2,3,\ldots,200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=3$ и $2\sin(2x+2y)=\sin 2x\sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y$.

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC=1, AL=4$. Найдите $\angle ACB$, MK, AB и площадь треугольника CMN.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=192$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK=9, KD=1$.

   а) Найдите длину ребра A_1A.

   б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-7x+12)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-3}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-4}$ равно сумме двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $2(g(x))^2-f(x)$, если наименьшее значение функции $2(f(x))^2-g(x)$ равно $\frac{7}{2}$.

3. На каждой из прямых $x=2$ и $x=9$ отмечено по 400 точек с ординатами $1,2,3,\ldots,400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=7$ и $2\sin(2x-2y)=\sin 2x\sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y$.

5. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $CL=2, BK=3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника BKN.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тридцати трёх последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 3168, а сумма расстояний от этих же тридцати трёх чисел до некоторого числа b равна 924. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=120$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K, что $C_1K=9, KD_1=4$.

   а) Найдите длину ребра A_1A.

   б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-10x+21)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-7}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-3}$ равно сумме двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2+5f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2+5g(x)$ равно -17.

3. На каждой из прямых $y=1$ и $y=12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1,2,3,\ldots,200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=2$ и $5\sin(2x-2y)=\sin 2x\sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$.

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC=1, AL=6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника CMN.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=98$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK=4, KD=1$.

   а) Найдите длину ребра A_1A.

   б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}\left(x^2-7x+10\right)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-5}$ равно сумме двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2-3f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2-3g(x)$ равно $\frac{11}{2}$.

3. На каждой из прямых $x=2$ и $x=15$ отмечено по 400 точек с ординатами $1,2,3,\ldots,400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=4$ и $3\sin(2x+2y)=\sin 2x\sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y$.

5. Окружность Γ радиуса $4\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $CL=4, BK=3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника BKN.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1624, а сумма расстояний от этих же двадцати девяти чисел до некоторого числа b равна 1305. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=115$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K, что $C_1K=16, KD_1=1$.

   а) Найдите длину ребра A_1A.

   б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y+\sin x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=24$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-12g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x=$ $=\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\sin y+\cos x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 17 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 8. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1926, а сумма расстояний от этих же двадцати семи чисел до числа a^2 равна 1932. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=15$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{13}{6}\right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y+\sin x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=8$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{1}{3}\right)$, $\log_{x-\frac{1}{3}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-6g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 11 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 1331^{38}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x= =\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\cos y+\cos x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 5. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати пяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1270, а сумма расстояний от этих же двадцати пяти чисел до числа a^2 равна 1234. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=3$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.