

10 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.
3. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

4. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \dots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.
 - а) Найдите отношение $AB : CD$.
 - б) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 256$.
7. В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120° . Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC . Найдите длины отрезков CL , MK , AB и площадь треугольника ANL .

10 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до $4 \cdot 10^{25}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 8f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 8g(x)$ равно -29 .
3. Уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^2 - \frac{20}{3x_2^3} = x_2^2 - \frac{20}{3x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

4. На каждой из прямых $y = 0$ и $y = 2$ отмечено по 64 точки с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 64$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = \frac{25}{7}$ и $MD = \frac{10}{7}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = \frac{3}{2}$ и $NC = \frac{9}{2}$.
 - а) Найдите отношение $AB : CD$.
 - б) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восьми последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 612, а сумма расстояний от этих же восьми чисел до некоторого числа b равна 240. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 100,5$.
7. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а угол ACB равен $\frac{2\pi}{3}$. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC . Найдите длины отрезков CK , MK , AB и площадь треугольника CMN .

10 класс

БИЛЕТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2^2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1^2}.$$

Найдите все возможные значения a .

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 343^{36} .
5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB , BC , CD , DA равны 4 , $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).
 - а) Найдите отношение $AP : PC$.
 - б) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 10$.
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 4460, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 2755. Найдите все возможные значения a .
7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника AKM .

10 класс

БИЛЕТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны 2414 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2414 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -8g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 - \frac{99}{2x_2^2} = x_2^3 - \frac{99}{2x_1^2}.$$

Найдите все возможные значения a .

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{50} .
5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB , BC , CD , DA равны 5 , $\sqrt{3}$, $\frac{5}{\sqrt{7}}$ и $5\sqrt{\frac{3}{7}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).
 - а) Найдите отношение $AP : PC$.
 - б) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 12$.
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 360, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 345. Найдите все возможные значения a .
7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 4. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника AKM .