БИЛЕТ 7

1. Каких целых чисел от 1 до 60 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на 780.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 4$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 5-значные числа, не превосходящие 60 000. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $3 \cdot 5^4$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $2 \cdot 5^4 + 1$ (не забываем учесть само число 60 000).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 - 1 = 780$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно -6.

Ответ: $\frac{11}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + (ax+c) = a^2x^2 + a(2b+1)x + b^2 + c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{2b+1}{2a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -b - \frac{1}{4} + c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + f(x)$ равно $-c - \frac{1}{4} + b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{1}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно -6, то второе равно $-\frac{1}{2} + 6 = \frac{11}{2}$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = \pm 9$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 24 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 6$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 6$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1 - x_2 - \frac{72}{25} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) - \frac{72\,(x_1 - x_2)\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{25\,(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $1 - \frac{72}{25} \cdot \frac{a^2-6}{216} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 81 = 0$, откуда $a = \pm 9$. Неравенству $a^2 - 24 > 0$ удовлетворяют оба найденных значения параметра.

4. На каждой из прямых $y = 3$ и $y = 4$ отмечено по 73 точки с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 73$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 10654.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 1$. Поскольку AH и BH – целые числа, то $AH = BH = 1$.

Гипотенузу AB, равную 2, можно расположить $71 \cdot 2 = 142$ способами (по $73 - 2$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 73 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 144 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $73 \cdot 144 = 10512$ способов.

Итого получаем $142 + 10512 = 10654$ способа.

5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = AC$, $BT = 70$, $AT = 37$.

Ответ: 420.

Решение. Пусть $\angle BTA = \alpha$, тогда по условию $\angle BAC = 2\alpha$. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, поэтому $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$. По сумме углов треугольника TBC получаем, что $\angle TBC = 180^\circ - \angle TCB - \angle BTC = 90^\circ$. Кроме того, $\angle TBA = \angle TBC - \angle ABC = \alpha$. Из равенства углов следует, что треугольники ABT и ABC равнобедренные, $AC = AB = AT$.

Тогда получаем $CT = 2AT = 74$, $BC = \sqrt{CT^2 - BT^2} = 24$, $S_{\triangle BTC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BT = 840$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCT} = 420$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа b равна 748. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 62{,}5$.

Ответ: $a = -0{,}75$, $a = 46{,}25$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+15$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+15]$, то сумма расстояний от него до данных шестнадцати чисел не превосходит $15 \cdot 8 = 120$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 15, сумма расстояний до $k+1$ и $k+14$ не превосходит 15, сумма расстояний до $k+2$ и $k+13$ также не превосходит 15 и т.д.). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|16a - k - (k+1) - \ldots - (k+15)| = 16|a - k - 7{,}5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $16|b - k - 7{,}5|$. Получаем систему

уравнений
$$\begin{cases} 16|a-k-7{,}5| = 276, \\ 16|b-k-7{,}5| = 748, \\ a+b = 62{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-7{,}5| = 17{,}25, \\ |b-k-7{,}5| = 46{,}75, \\ a+b = 62{,}5. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда
$$\begin{cases} a-k-7{,}5 = 17{,}25, \\ b-k-7{,}5 = 46{,}75, \\ a+b = 62{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16{,}5, \\ b = 46, \\ k = -8{,}25. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда
$$\begin{cases} -a+k+7{,}5 = 17{,}25, \\ -b+k+7{,}5 = 46{,}75, \\ a+b = 62{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 46, \\ b = 16{,}5, \\ k = 55{,}75. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда
$$\begin{cases} a-k-7{,}5 = 17{,}25, \\ -b+k+7{,}5 = 46{,}75, \\ a+b = 62{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 63{,}25, \\ b = -0{,}75, \\ k = 38{,}5. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда
$$\begin{cases} -a+k+7{,}5 = 17{,}25, \\ b-k-7{,}5 = 46{,}75, \\ a+b = 62{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0{,}75, \\ b = 63{,}25, \\ k = 9. \end{cases}$$

Итак, возможно только, что $a = -0{,}75$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Луч BP пересекает сторону DA в точке M, а луч DQ пересекает сторону BC в точке N. Оказалось, что $AM = \frac{9}{7}$, $DM = \frac{12}{7}$ и $BN = \frac{20}{9}$, $CN = \frac{25}{9}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD.

Ответ: а) $AB : CD = 3 : 5$; б) $AB = 3$, $CD = 5$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 3 : 4$ и $BD : DC = BN : NC = 4 : 5$. Следовательно, $AB : CD = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = 3 : 5$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник

BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 3 - y$, $AP = AF = 3 - y$, $CQ = BC - BQ = 5 - x$, $CE = CQ = 5 - x$, $AB = AP + PB = 3 + x - y$, $CD = 5 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 3 : 5$, откуда $\frac{3+x-y}{5-x+y} = \frac{3}{5}$, $x = y$. Тогда $AB = 3$, $CD = 5$.

БИЛЕТ 8

1. Каких целых чисел от 1 до 80 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на 780.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 4$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 5-значные числа, не превосходящие 80 000. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $4 \cdot 5^4$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $3 \cdot 5^4 + 1$ (не забываем учесть само число 80 000).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 - 1 = 780$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно 4.

Ответ: $-\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + (ax+c) = a^2x^2 + a(2b+1)x + b^2 + c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{2b+1}{2a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -b - \frac{1}{4} + c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + f(x)$ равно $-c - \frac{1}{4} + b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{1}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно 4, то второе равно $-\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 8 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1 - \frac{64}{17x_2^3} = x_2 - \frac{64}{17x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = \pm 12$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 32 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 8$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 8$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1 - x_2 - \frac{64}{17} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) - \frac{64(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{17(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $1 - \frac{64}{17} \cdot \frac{a^2-8}{512} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 144 = 0$, откуда $a = \pm 12$. Неравенству $a^2 - 32 > 0$ удовлетворяют оба найденных значения параметра.

4. На каждой из прямых $x = 5$ и $x = 6$ отмечено по 58 точек с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 58$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 116 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 6724.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 1$. Поскольку AH и BH – целые числа, то $AH = BH = 1$.

Гипотенузу AB, равную 2, можно расположить $56 \cdot 2 = 112$ способами (по $58 - 2$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 58 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 114 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $58 \cdot 114 = 6612$ способов.

Итого получаем $112 + 6612 = 6724$ способа.

5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = AC$, $BT = 42$, $AT = 29$.

Ответ: 420.

Решение. Пусть $\angle BTA = \alpha$, тогда по условию $\angle BAC = 2\alpha$. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, поэтому $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$. По сумме углов треугольника TBC получаем, что $\angle TBC = 180^\circ - \angle TCB - \angle BTC = 90^\circ$. Кроме того, $\angle TBA = \angle TBC - \angle ABC = \alpha$. Из равенства углов следует, что треугольники ABT и ABC равнобедренные, $AC = AB = AT$.

Тогда получаем $CT = 2AT = 58$, $BC = \sqrt{CT^2 - BT^2} = 40$, $S_{\triangle BTC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BT = 840$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCT} = 420$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двенадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 358, а сумма расстояний от этих же двенадцати чисел до некоторого числа b равна 212. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 114{,}5$.

Ответ: $a = \frac{190}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+11$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+11]$, то сумма расстояний от него до данных двенадцати чисел не превосходит $11 \cdot 6 = 66$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 11, сумма расстояний до $k+1$ и $k+10$ не превосходит 11, сумма расстояний до $k+2$ и $k+9$ также не превосходит 11 и т.д.). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+11]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|12a - k - (k+1) - \ldots - (k+11)| = 12|a - k - 5{,}5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $12|b - k - 5{,}5|$. Получаем систему

уравнений
$$\begin{cases} 12|a-k-5{,}5| = 358, \\ 12|b-k-5{,}5| = 212, \\ a+b = 114{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-5{,}5| = 29\frac{5}{6}, \\ |b-k-5{,}5| = 17\frac{2}{3}, \\ a+b = 114{,}5. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда
$$\begin{cases} a-k-5{,}5 = 29\frac{5}{6}, \\ b-k-5{,}5 = 17\frac{2}{3}, \\ a+b = 114{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 63\frac{1}{3}, \\ b = 51\frac{1}{6}, \\ k = 28. \end{cases}$$

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда
$$\begin{cases} -a+k+5{,}5 = 29\frac{5}{6}, \\ -b+k+5{,}5 = 17\frac{2}{3}, \\ a+b = 114{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 51\frac{1}{6}, \\ b = 63\frac{1}{3}, \\ k = 75{,}5. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда
$$\begin{cases} a-k-5{,}5 = 29\frac{5}{6}, \\ -b+k+5{,}5 = 17\frac{2}{3}, \\ a+b = 114{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 81, \\ b = 33{,}5, \\ k = 45\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда
$$\begin{cases} -a+k+5{,}5 = 29\frac{5}{6}, \\ b-k-5{,}5 = 17\frac{2}{3}, \\ a+b = 114{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 33{,}5, \\ b = 81, \\ k = 57\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

Итак, возможно только, что $a = 63\frac{1}{3} = \frac{190}{3}$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Луч BP пересекает сторону DA в точке M, а луч DQ пересекает сторону BC в точке N. Оказалось, что $AM = \frac{8}{3}$, $DM = \frac{4}{3}$ и $BN = \frac{6}{5}$, $CN = \frac{9}{5}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD.

Ответ: а) $AB : CD = 4 : 3$; б) $AB = 4$, $CD = 3$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 2 : 1$ и $BD : DC = BN : NC = 2 : 3$. Следовательно, $AB : CD = 2 \cdot \frac{2}{3} = 4 : 3$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник

BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 4 - y$, $AP = AF = 4 - y$, $CQ = BC - BQ = 3 - x$, $CE = CQ = 3 - x$, $AB = AP + PB = 4 + x - y$, $CD = 3 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 4 : 3$, откуда $\frac{4+x-y}{3-x+y} = \frac{4}{3}$, $x = y$. Тогда $AB = 4$, $CD = 3$.

БИЛЕТ 15

1. Даны 6000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 6000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 179940.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 60 штук). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_60^2 = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 60 штук), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 1770 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 49 (таких карточек $49 \cdot 60 = 2940$). Для каждой из них пару можно выбрать 60 способами (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $2940 \cdot 60 = 176400$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего случая (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $1770 + 1770 + 176400 = 179940$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 20g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = \frac{f(x)}{A}$.

   Ответ: $-0{,}05$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = 20g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = 20g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2 = 20(ax+c)$, $a^2x^2 + 2a(b-10)x + b^2 - 20c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b-10)^2 - a^2\left(b^2 - 20c\right) = 20a^2(5 - b + c)$, откуда $b - c = 5$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = \frac{f(x)}{A}$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = \frac{f(x)}{A}$ имеет единственное решение. Это уравнение (при условии $A \neq 0$) равносильно следующим: $A(ax+c)^2 = ax + b$, $Aa^2x^2 + a(2Ac-1)x + Ac^2 - b = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2Ac-1)^2 - 4Aa^2\left(Ac^2 - b\right) = a^2(4Ab - 4Ac + 1)$. Он обращается в ноль при $A = \frac{1}{4(c-b)} = -\frac{1}{20}$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

   $$x_1^3 - \frac{39}{x_2} = x_2^3 - \frac{39}{x_1}.$$

   Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = \pm 4$.

   Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 12 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 3$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 3$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3 - x_2^3 - 39 \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) - \frac{39\,(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2 - 3 - \frac{39}{3} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16 = 0$, откуда $a = \pm 4$. Неравенству $a^2 - 12 > 0$ удовлетворяют оба найденных значения параметра.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 3 с *натуральными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{45}.

Ответ: 4489.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 3^a)\left(x - 3^b\right)$, где a, b – натуральные числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a > b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - \left(3^a + 3^b\right)x + 3^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 3^a + 3^b \leqslant 27^{45}, \\ 3^{a+b} \leqslant 27^{45} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^a + 3^b \leqslant 3^{135}, \\ a + b \leqslant 135. \end{cases}$$

Заметим, что если для некоторых натуральных a и b выполняется второе неравенство, то первое неравенство также верно. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$\begin{gathered}
a = 135 \Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\
a = 134 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 1); \\
a = 133 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{1; 2\}); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a = 69 \Rightarrow 66 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 66\}); \\
a = 68 \Rightarrow 67 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 67\}); \\
a = 67 \Rightarrow 66 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 66\}); \\
a = 66 \Rightarrow 65 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 65\}); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a = 2 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 1); \\
a = 1 \Rightarrow 0 \text{ значений } b.
\end{gathered}$$

Суммируя, получаем $(1 + 2 + 3 + \ldots 67) + (66 + 65 + 64 + \ldots + 1) = 4489$ вариантов.

5. Окружность с центром O, вписанная в треугольник PQR, касается его сторон PQ, QR и RP в точках C, A и B соответственно. Прямые BO и CO пересекают стороны PQ и PR в точках K и L соответственно. Найдите отношение $QA : AR$, если $KQ = 3$, $QR = 16$, $LR = 1$.

Ответ: $9 : 7$.

Решение. Треугольники PBK и PCL равны ($PB = PC$ как касательные, проведённые к окружности из одной точки; $\angle P$ – общий; углы при вершинах B и C – прямые). Следовательно, $PK = PL$, а так как $PC = PB$, то и $CK = BL$. Пусть $CK = BL = x$. Тогда $QA = QC = QK + KC = 3 + x$, $RA = RB = RL + LB = 1 + x$. Поскольку $QR = 16$, получаем, что $(3 + x) + (1 + x) = 16$, откуда $x = 6$. Значит, $AQ : AR = 9 : 7$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тринадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 260, а сумма расстояний от этих же тринадцати чисел до числа a^2 равна 1768. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -12$, $a = 13$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+12$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+12]$, то сумма расстояний от него до данных тринадцати чисел не превосходит $\frac{13}{2} \cdot 12 = 78$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 12, сумма расстояний до $k+1$ и $k+11$ не превосходит 12, сумма расстояний до $k+2$ и $k+10$ также не превосходит 12 и т.д.; расстояние до $k+6$ не превосходит половины длины отрезка между числами, т.е. 6). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+12]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|20a - k - (k+1) - \ldots - (k+19)| = |20a - 20k - 190|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|20a^2 - 20k - 190|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |13a^2 - 13k - 78| = 1768, \\ |13a - 13k - 78| = 260. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - k - 6| = 136, \\ |a - k - 6| = 20. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+12]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 6 = 136, \\ a - k - 6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - k - 6 = 20, \\ a^2 - a - 116 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a - 26, \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{465}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+12]$. Тогда

$$\begin{cases} k + 6 - a^2 = 136, \\ k + 6 - a = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 6 - a = 20, \\ a^2 - a + 116 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+12]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 6 = 136, \\ k + 6 - a = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 6 - a = 20, \\ a^2 - a - 156 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 14, \\ \left[\begin{array}{l} a = -12, \\ a = 13 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -12 \Rightarrow k = 2$; $a = 13 \Rightarrow k = 27$), следовательно, оба значения a подходят.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+12]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -12$ и $a = 13$.

7. В окружность вписан четырехугольник $KLMN$ с диагоналями KM и LN, которые пересекаются в точке T. Основания перпендикуляров, опущенных из точки T на стороны четырехугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки T до сторон KL, LM, MN, NK равны $4\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{17}}$ и $\frac{8}{\sqrt{17}}$ соответственно.

а) Найдите отношение $KT : TM$.

б) Найдите длину диагонали LN, если дополнительно известно, что $KM = 10$.

Ответ: $KT : TM = 4$, $BD = \frac{50}{\sqrt{34}}$.

Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle TLK = \angle TMN$, $\angle TKL = \angle TNM$. Следовательно, треугольники TKL и TNM подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle TKN \sim \triangle TLM$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины T. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ для первой пары и $k_2 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ для второй пары.

Пусть $KT = \sqrt{17}x$. Тогда $NT = \frac{KT}{k_1} = x\sqrt{2}$; $MT = \frac{NT}{k_2} = \frac{x\sqrt{17}}{4}$, $LT = \frac{KT}{k_2} = \frac{17x}{4\sqrt{2}}$.

Значит, $KT : TM = x\sqrt{17} : \frac{x\sqrt{17}}{4} = 4 : 1$.

Если $KM = 10$, то $x\sqrt{17} + \frac{x\sqrt{17}}{4} = 10$, $x = \frac{8}{\sqrt{17}}$. Следовательно, $LN = x\sqrt{2} + \frac{17x}{4\sqrt{2}} = \frac{25x}{4\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

БИЛЕТ 16

1. Даны 5000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 5000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 124950.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 50 штук). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_50^2 = \frac{50\cdot 49}{2} = 1225$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 50 штук), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 1225 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 49 (таких карточек $49\cdot 50 = 2450$). Для каждой из них пару можно выбрать 50 способами (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $2450\cdot 50 = 122500$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего случая (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $1225 + 1225 + 122500 = 124950$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -50g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = \frac{f(x)}{A}$.

   Ответ: 0,02.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = -50g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = -50g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = -50(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b + 25)x + b^2 + 50c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b + 25)^2 - a^2\left(b^2 + 50c\right) = 25a^2(25 + 2b - 2c)$, откуда $2(b - c) = -25$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = \frac{f(x)}{A}$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = \frac{f(x)}{A}$ имеет единственное решение. Это уравнение (при условии $A \neq 0$) равносильно следующим: $A(ax+c)^2 = ax+b$, $Aa^2x^2 + a(2Ac-1)x + Ac^2 - b = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2Ac-1)^2 - 4Aa^2\left(Ac^2 - b\right) = a^2(4Ab - 4Ac + 1)$. Он обращается в ноль при $A = \frac{1}{4(c-b)} = \frac{1}{50}$.

3. Уравнение $x^2 + ax - 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

   $$x_1^3 + \frac{22}{x_2} = x_2^3 + \frac{22}{x_1}.$$

   Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = \pm 3$.

   Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 + 8 > 0$ (это неравенство верно при любых a). По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = -2$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 + 2$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3 - x_2^3 + 22 \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) + \frac{22\,(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2 + 2 - \frac{22}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0$, откуда $a = \pm 3$.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 5 с *натуральными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{48}.

Ответ: 5112.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 5^a)\left(x - 5^b\right)$, где a, b – натуральные числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a > b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - \left(5^a + 5^b\right)x + 5^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 125^{48}, \\ 5^{a+b} \leqslant 125^{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 5^{144}, \\ a + b \leqslant 144. \end{cases}$$

Заметим, что если для некоторых натуральных a и b выполняется второе неравенство, то первое неравенство также верно. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$a = 144 \Rightarrow 0 \text{ значений } b;$$
$$a = 143 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 1);$$
$$a = 142 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{1; 2\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 73 \Rightarrow 66 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 71\});$$
$$a = 72 \Rightarrow 67 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 71\});$$
$$a = 71 \Rightarrow 66 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 70\});$$
$$a = 70 \Rightarrow 65 \text{ значений } b \ (b \in \{1; 2; \ldots; 69\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 2 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 1);$$
$$a = 1 \Rightarrow 0 \text{ значений } b.$$

Суммируя, получаем $(1 + 2 + 3 + \ldots 71) + (71 + 70 + 69 + \ldots + 1) = 5112$ вариантов.

5. Окружность с центром O, вписанная в треугольник PQR, касается его сторон PQ, QR и RP в точках C, A и B соответственно. Прямые BO и CO пересекают стороны PQ и PR в точках K и L соответственно. Найдите отношение $QA : AR$, если $KQ = 1$, $QR = 11$, $LR = 2$.

Ответ: $5 : 6$.

Решение. Треугольники PBK и PCL равны ($PB = PC$ как касательные, проведённые к окружности из одной точки; $\angle P$ – общий; углы при вершинах B и C – прямые). Следовательно, $PK = PL$, а так как $PC = PB$, то и $CK = BL$. Пусть $CK = BL = x$. Тогда $QA = QC = QK + KC = 1 + x$, $RA = RB = RL + LB = 2 + x$. Поскольку $QR = 11$, получаем, что $(1 + x) + (2 + x) = 16$, откуда $x = 4$. Значит, $AQ : AR = 5 : 6$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двенадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 3306, а сумма расстояний от этих же двенадцати чисел до числа a^2 равна 1734. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = 21$, $a = -20$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+11$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+11]$, то сумма расстояний от него до данных двенадцати чисел не превосходит $6 \cdot 11 = 66$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 11, сумма расстояний до $k+1$ и $k+10$ не превосходит 11, сумма расстояний до $k+2$ и $k+19$ также не превосходит 11 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|12a - k - (k+1) - \ldots - (k+11)| = |12a - 12k - 66|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|12a^2 - 12k - 66|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |12a^2 - 12k - 66| = 1734, \\ |12a - 12k - 66| = 3306. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2a^2 - 2k - 11| = 289, \\ |2a - 2k - 11| = 551. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда

$$\begin{cases} 2a^2 - 2k - 11 = 289, \\ 2a - 2k - 11 = 551 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2k - 11 = 551, \\ a^2 - a + 131 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда

$$\begin{cases} 2k + 11 - 2a^2 = 289, \\ 2k + 11 - 2a = 551 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k - 2a = 540, \\ a^2 - a - 131 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 270, \\ a = \frac{1 \pm 5\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+11]$. Тогда

$$\begin{cases} 2a^2 - 2k - 11 = 289, \\ 2k + 11 - 2a = 551 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k - 2a = 540, \\ a^2 - a - 420 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 270, \\ \left[\begin{array}{l} a = -20, \\ a = 21 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -20 \Rightarrow k = 250$; $a = 21 \Rightarrow k = 291$), следовательно, оба значения a подходят.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+11]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -20$ и $a = 21$.

7. В окружность вписан четырехугольник $KLMN$ с диагоналями KM и LN, которые пересекаются в точке T. Основания перпендикуляров, опущенных из точки T на стороны четырехугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки T до сторон KL, LM, MN, NK равны $5\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $5\sqrt{\frac{2}{13}}$ и $5\sqrt{\frac{2}{13}}$ соответственно.

а) Найдите отношение $KT : TM$.

б) Найдите длину диагонали LN, если дополнительно известно, что $KM = 12$.

Ответ: $KT : TM = 5$, $LN = \frac{36}{\sqrt{13}}$.

Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle TLK = \angle TMN$, $\angle TKL = \angle TNM$. Следовательно, треугольники TKL и TNM подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle TKN \sim \triangle TLM$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины T. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \sqrt{13}$ для первой пары и $k_2 = \frac{5}{\sqrt{13}}$ для второй пары.

Пусть $KT = \sqrt{13}x$. Тогда $NT = \frac{KT}{k_1} = x$; $MT = \frac{NT}{k_2} = \frac{x\sqrt{13}}{5}$, $LT = \frac{KT}{k_2} = \frac{13x}{5}$.

Значит, $KT : TM = x\sqrt{13} : \frac{x\sqrt{13}}{5} = 5 : 1$.

Если $KM = 12$, то $x\sqrt{13} + \frac{x\sqrt{13}}{5} = 12$, $x = \frac{10}{\sqrt{13}}$. Следовательно, $LN = x + \frac{13x}{5} = \frac{18x}{5} = \frac{36}{\sqrt{13}}$.