Онлайн тур олимпиады «Физтех» 2017-2018

11 класс

1. Две параболы param1 и param2 касаются в точке, лежащей на оси Ox. Через точку D – вторую точку пересечения первой параболы с осью Ox – проведена вертикальная прямая, пересекающая вторую параболу в точке A, а общую касательную к параболам – в точке B. Найдите отношение $DA : DB$.

param1	param2	Ответ
$y = x^2 + ax + b$	$y = -3x^2 + cx + d$	4
$y = 2x^2 + ax + b$	$y = -5x^2 + cx + d$	3,5
$y = x^2 + ax + b$	$y = -6x^2 + cx + d$	7
$y = 2x^2 + ax + b$	$y = -3x^2 + cx + d$	2,5

2. Внутри острого угла ABC взяты точки M и N так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$, $AM \perp BM$ и $AN \perp BN$. Прямая MN пересекает луч BC в точке K. Найдите BN, если param1.

param1	Ответ
$BM = 24,\ BK = 3$	4
$BM = 18,\ BK = 7$	8,4
$BM = 50,\ BK = 14$	17,5
$BM = 25,\ BK = 7$	8,75

3. Найдите количество целочисленных решений $(a; b; c)$ уравнения param1, удовлетворяющих условию param2.

param1	param2	Ответ
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 33750$	$\lvert a+b+c \rvert \leq 120$	120
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 506250$	$\lvert a+b+c \rvert < 91$	90
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 15000$	$\lvert a+b+c \rvert \leq 250$	250
$150^a \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^b \cdot 2250^c = 225000$	$\lvert a+b+c \rvert < 113$	112

4. Дана последовательность $y_n = n(n+1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами *k* и *l* (param1) делится на param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $l+k$.

param1	param2	Ответ
$l<100<k$	3^{10}	728
$l<115<k$	3^{11}	2186
$l<125<k$	3^{11}	728
$l<157<k$	3^{12}	2186

5. Известно, что для всех пар положительных чисел (*x*; *y*), для которых выполняется равенство $x+y=$param1 и неравенство $x^2+y^2>$param2, выполняется и неравенство $x^5+y^5>m$. Какое **наибольшее** значение может принимать *m*?

param1	param2	Ответ
5	13	275
7	27	2177
6	25	2743,5
8	35	4058
9	43	6039

6. В правильный тетраэдр *KLMN* с ребром param1 вписана сфера Ω. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что его диагональ A_1C_1 лежит на прямой *KL*, а прямая *BD* касается сферы Ω в точке, лежащей на отрезке *BD*. Какую **наименьшую** площадь поверхности может иметь куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Ответ округлите до десятых.

param1	Ответ
$3\sqrt{2}$	2
$3\sqrt{7}$	7
$6\sqrt{3}$	12
$9\sqrt{5}$	45

7. Известно, что число *a* удовлетворяет уравнению param1, а число *b* – уравнению param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $a+b$.

param1	param2	Ответ
$x^3-3x^2+5x-17=0$	$x^3-6x^2+14x+2=0$	3
$x^3+3x^2+6x-9=0$	$x^3+6x^2+15x+27=0$	–3
$x^3-6x^2+16x-28=0$	$x^3+3x^2+7x+17=0$	1
$x^3+6x^2+17x+7=0$	$x^3-3x^2+8x+5=0$	–1

8. Найдите наибольшее значение выражения param1, если числа x, y, z являются решениями системы param2. Ответ округлите до тысячных.

param1	param2	Ответ
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{8}{9}+\sin x}=\frac{3}{2}\cos y+\frac{1}{3}\operatorname{tg} y \\ \sqrt{\frac{8}{9}+\sin y}=\frac{3}{2}\cos z+\frac{1}{3}\operatorname{tg} z \\ \sqrt{\frac{8}{9}+\sin z}=\frac{3}{2}\cos x+\frac{1}{3}\operatorname{tg} x \end{cases}$	0,098
$\cos(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{21}{25}+\cos x}=\frac{5}{4}\sin y+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} y, \\ \sqrt{\frac{21}{25}+\cos y}=\frac{5}{4}\sin z+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} z, \\ \sqrt{\frac{21}{25}+\cos z}=\frac{5}{4}\sin x+\frac{2}{5}\operatorname{ctg} x. \end{cases}$	0,231
$\cos(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{5}{9}+\cos x}=\frac{3}{4}\sin z+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} z, \\ \sqrt{\frac{5}{9}+\cos y}=\frac{3}{4}\sin x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x, \\ \sqrt{\frac{5}{9}+\cos z}=\frac{3}{4}\sin y+\frac{2}{3}\operatorname{ctg} y. \end{cases}$	0,852
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{15}{16}-\sin x}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} y-2\cos y, \\ \sqrt{\frac{15}{16}-\sin y}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} z-2\cos z, \\ \sqrt{\frac{15}{16}-\sin z}=\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-2\cos x. \end{cases}$	0,468
$\sin(x+y+z)$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{24}{25}-\sin x}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} z-\frac{5}{2}\cos z, \\ \sqrt{\frac{24}{25}-\sin y}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} x-\frac{5}{2}\cos x, \\ \sqrt{\frac{24}{25}-\sin z}=\frac{1}{5}\operatorname{tg} y-\frac{5}{2}\cos y. \end{cases}$	0,652

9. На столе лежит param1 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно param2 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

param1	param2	Ответ
120	60	63

17. Известно, что число a удовлетворяет уравнению param1, а число b – уравнению param2. Найдите **наибольшее** возможное значение суммы $a+b$.

param1	param2	Ответ
$x^3-3x^2+5x-17=0$	$x^3-3x^2+5x+11=0$	2
$x^3+3x^2+6x-9=0$	$x^3+3x^2+6x+17=0$	–2
$x^3-6x^2+16x-28=0$	$x^3-6x^2+16x-4=0$	4
$x^3+6x^2+17x+7=0$	$x^3+6x^2+17x+29=0$	–4

18. Дана последовательность $x_n=n(n+1)$. Известно, что разность двух членов этой последовательности с номерами k и l (param1) делится на param2. Найдите **наименьшее** возможное значение суммы $l+k$.

param1	param2	Ответ
$l<70<k$	5^8	3124
$l<150<k$	5^9	15624
$l<350<k$	5^9	3124
$l<415<k$	5^{10}	15624

19. В футбольном турнире, проходящем в один круг (каждая команда должны сыграть с каждой ровно по одному разу), играют N команд. В некоторый момент турнира тренер команды A заметил, что любые две команды, отличные от A, сыграли разное количество игр. Также известно, что к этому моменту команда A сыграла param1 игр. Какое количество N команд могло участвовать в этом турнире? В ответ запишите сумму всех возможных значений N.

param1	Ответ
10	63
11	69
12	75
13	81
15	93

20. На столе лежит param1 внешне одинаковых монет. Известно, что среди них ровно param2 фальшивых. Разрешается указать на любые две монеты и спросить, верно ли, что обе эти монеты фальшивые. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно получить по крайней мере один ответ «Верно»?

param1	param2	Ответ
105	53	54

150	75	78
160	80	83
210	105	108
220	110	113

10. Во время опроса param1 человек каждому из них предлагалось указать один любимый фильм. Оказалось, что из любых 10 опрошенных по крайней мере 3 указали один и тот же фильм. При каком наибольшем M можно утверждать, что среди опрошенных обязательно найдутся M человек, указавших один и тот же фильм?

param1	Ответ
64	16
72	18
76	19
88	22