

Дистанционный тур олимпиады «Физтех – интернешнл» 2017-2018

11 класс

1. Известно, что у трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ корни соответственно на 3 больше, чем корни трехчлена param1. Пусть M – сумма коэффициентов $f(x)$, а N – сумма коэффициентов трехчлена $g(x)$. Какое **наименьшее** значение может принимать $|M - N|$?

param1	Ответ
$g(x) = x^2 - (5 + c^2)x + d$	18
$g(x) = x^2 - (7 + c^2)x + d$	24
$g(x) = x^2 - (9 + c^2)x + d$	30
$g(x) = x^2 - (11 + c^2)x + d$	36

2. На координатной плоскости нарисован график функции param1. Рассматриваются прямоугольные треугольники такие, что все три вершины лежат на этом графике, причем вершина прямого угла расположена в начале координат. Какое param2 значение может принимать произведение расстояний от вершин острых углов до оси Ox ?

param1	param2	Ответ
$y = \frac{1}{243}x^6$	наибольшее	9
$y = 32x^6$	наибольшее	0,25
$y = \frac{1}{32}x^6$	наименьшее	4
$y = \frac{32}{243}x^6$	наименьшее	2,25

3. Точки K , L и M – соответственно середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC . Обозначим $R(XYZ)$ – радиус окружности, описанной около треугольника XYZ . Оказалось, что $R(AKC):R(AKB)=\text{param1}$, $R(CLB):R(BLA)=\text{param2}$. Найдите отношение $R(AMC):R(BMC)$.

param1	param2	Ответ
1,8	1,2	1,5
2,1	1,5	1,4
1,75	1,4	1,25
2,1	1,75	1,2
2	1,6	1,25

4. Пусть $f(x)$ – квадратный трехчлен. График параболы $y = f(x)$ касается прямых param1 и param2. Найдите **наибольшее** возможное значение дискриминанта этого трехчлена.

param1	param2	Ответ
$y = x + 3$	$y = -3x - 9$	-3
$y = x - 2$	$y = 8 - 4x$	-4
$y = -3x - 15$	$y = x + 5$	-3
$y = 20 - 5x$	$y = x - 4$	-5

5. Числа x и y являются решениями системы уравнений param1, где a – параметр. Какое param2 значение принимает выражение param3?

param1	param2	param3	Ответ
$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ x + 4ay = 3 \end{cases}$	наибольшее	$x^2 - 6y^2$	27
$\begin{cases} -x + ay = 2a \\ ax - y = 3a - 5 \end{cases}$	наименьшее	$x^2 + y^2$	2
$\begin{cases} ax + 9y = a + 3 \\ x + ay = 2 \end{cases}$	наибольшее	$3y^2 - x^2$	2
$\begin{cases} x + ay = 3a \\ ax + y = a + 4 \end{cases}$	наименьшее	$2x^2 + y^2$	6

6. Сколькими способами можно заменить все звёздочки на param1 чётных и param2 нечетных цифры (не обязательно различных) в числе param3 так, чтобы полученное число делилось на 12?

param1	param2	param3	Ответ
3	3	2017*7**13**112*	31250
5	2	2017***123***34*	234375
2	3	2017*171***256*	2500
2	4	2017**25**7*78*	15625

7. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Продолжения высот треугольника ABC , проведенных из вершин A и C , пересекают Ω в точках M и N . Найдите радиус окружности Ω , если param1.

param1	Ответ
$AC = 7, MN = 4\sqrt{6}$	4,9
$AC = 11, MN = 2\sqrt{21}$	6,05
$AC = 6, MN = \sqrt{119}$	7,2
$AC = 5, MN = 2\sqrt{21}$	6,25
$AC = 7, MN = 6\sqrt{5}$	12,25

8. В опросе участвовали param1 человек. Им был предложен список из N фильмов. Каждый должен был назвать свои любимые фильмы из этого списка. Оказалось, что каждый назвал не менее двух фильмов. При этом у любой пары опрошенных среди названных ими любимых фильмов было не больше одного общего. Найдите **наименьшее** возможное значение N .

param1	Ответ
30	9
39	10
49	11
57	12
60	12

9. Дан правильный param1 . Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором ровно два угла равны 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

param1	Ответ
16-угольник	336
18-угольник	504
20-угольник	720
14-угольник	210

10. Найдите сумму корней уравнения param1 , лежащих на отрезке param2 . Ответ запишите в градусах.

param1	param2	Ответ
$\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$	$[360^\circ; 720^\circ]$	1800
$\cos x - \cos^2 x - \sin^3 x = 0$	$[180^\circ; 540^\circ]$	990
$\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$	$[-360^\circ; 0^\circ]$	-360
$\cos x - \cos^2 x - \sin^3 x = 0$	$[-540^\circ; -180^\circ]$	-1170