БИЛЕТ 1

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-3x+2)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x=3$.

Решение. Заметим, что *на ОДЗ* сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2}\left(\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{x^2}{x-1}(x^2-3x+2)\right)=\log_{x^2}x^4=2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=a+b$ и $a+b+c=2$, откуда следует, что $c=1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{x^2}{x-2}, \\ x^2=\dfrac{x^2}{x-1}, \\ x^2=x^2-3x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \\ x=2, \\ x=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Из найденных значений переменной только $x=3$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2+2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2+2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq 0$. Рассмотрим $h(x)=3(f(x))^2+2g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x)=3(ax+b)^2+2(ax+c)=3a^2x^2+2a(3b+1)x+3b^2+2c$. График $y=h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}}=-\frac{3b+1}{3a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}})=-2b-\frac{1}{3}+2c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $3(g(x))^2+2f(x)$ равно $-2c-\frac{1}{3}+2b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{2}{3}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $-\frac{19}{6}$, то второе равно $-\frac{2}{3}+\frac{19}{6}=\frac{5}{2}$.

3. На каждой из прямых $y=1$ и $y=6$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1,2,3,\ldots,200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: $C_{200}^2\cdot 4+190\cdot 2+174\cdot 4=80676$.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 25$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 5$, $AH = 25$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 25$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 10, можно расположить $190 \cdot 2 = 380$ способами (по $200 - 10$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 26, и её можно расположить $2(200 - 26) = 348$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 348 = 696$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 200 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 398 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $200 \cdot 398 = 79600$ способов.

Итого получаем $380 + 696 + 79600 = 80676$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3$ и $2\sin(2x+2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = 3 \Leftrightarrow \sin(x+y) = 3\sin x \sin y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$4\sin(x+y)\cos(x+y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $3\sin x \sin y$ вместо $\sin(x+y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\sin x \sin y \neq 0$):

$$12\sin x \sin y \cos(x+y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 3\cos(x+y) = \cos x \cos y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\cos x \cos y - 3\sin x \sin y = \cos x \cos y \Leftrightarrow 2\cos x \cos y = 3\sin x \sin y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{3}{2}.$$

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1, AL = 4$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника CMN.

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 3$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол BAC через α.

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2\cdot MO\cdot \sin 60^\circ = 3$.

$\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, следовательно, треугольник MOL – равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник ALM. По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2 \cdot AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$. По теореме синусов $\frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{LM}{\sin\alpha}$, откуда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Так как угол α лежит напротив меньшей стороны треугольника, то он острый. Из треугольника ACH получаем, что $CH = AC\sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM\cdot AN$, откуда $AN = \frac{16}{\sqrt{7}}$, $MN = AN - AM = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Тогда площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2}\cdot CH\cdot MN = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 5$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$, $\frac{BA-\sqrt{7}}{BA} = \frac{3}{5}$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 192$.

Ответ: $a = 104$, $a = 191$, $a = 1$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+6$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+6]$, то сумма расстояний от него до данных семи чисел не превосходит $\frac{7}{2}\cdot 6 = 21$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 6, сумма расстояний до $k+1$ и $k+5$ не превосходит 6, сумма расстояний до $k+2$ и $k+4$ также не превосходит 6, расстояние до $k+3$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 3). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+6]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|7a - k - (k+1) - \ldots - (k+6)| = 7|a - k - 3|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $7|b - k - 3|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7|a-k-3| = 609, \\ 7|b-k-3| = 721, \\ a+b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-3| = 87, \\ |b-k-3| = 103, \\ a+b = 192. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-3 = 87, \\ b-k-3 = 103, \\ a+b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 88, \\ b = 104, \\ k = -2. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+3 = 87, \\ -b+k+3 = 103, \\ a+b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 104, \\ b = 88, \\ k = 188. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-3=87, \\ -b+k+3=103, \\ a+b=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=191, \\ b=1, \\ k=101. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+3=87, \\ b-k-3=103, \\ a+b=192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=191, \\ k=85. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a=1$, $a=191$, $a=104$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK=9, KD=1$.

а) Найдите длину ребра A_1A.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

Ответ: $A_1A=18, V=1944, R=3\sqrt{10}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром BC. Отрезки CK и CF равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина BC и $BC=2\cdot CF=2\cdot CK=18$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1=CC_1=BC=18$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1. Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами AD через M, а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $ABCD$, через ω. Пусть O – центр ω.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle FCD + \angle MDC) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OCD прямоугольный, $OK=\sqrt{CK\cdot DK}=3$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $BC\cdot FM = 2\cdot CF\cdot 2\cdot OK = 2\cdot 9\cdot 6 = 108$. объём параллелепипеда равен $AA_1\cdot S_{ABCD}=18\cdot 108=1944$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK=\sqrt{OK^2+OQ^2}=\sqrt{OK^2+\frac{1}{4}AA_1^2}=3\sqrt{10}$.

БИЛЕТ 2

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}\left(x^2-7x+12\right)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-3}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-4}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x=5$.

Решение. Заметим, что *на ОДЗ* сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2}\left(\frac{x^2}{x-3}\cdot\frac{x^2}{x-4}\left(x^2-7x+12\right)\right)=\log_{x^2}x^4=2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=a+b$ и $a+b+c=2$, откуда следует, что $c=1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{x^2}{x-3},\\ x^2=\dfrac{x^2}{x-4},\\ x^2=x^2-7x+12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=4,\\ x=5,\\ x=\dfrac{12}{7}. \end{array}\right.$$

Из найденных значений переменной только $x=5$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $2(g(x))^2-f(x)$, если наименьшее значение функции $2(f(x))^2-g(x)$ равно $\frac{7}{2}$.

Ответ: $-\frac{15}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq 0$. Рассмотрим $h(x)=2(f(x))^2-g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x)=2(ax+b)^2-(ax+c)=2a^2x^2+a(4b-1)x+2b^2-c$. График $y=h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}}=-\frac{4b-1}{4a}$; ордината вершины равна $h\left(x_{\text{в}}\right)=b-\frac{1}{8}-c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $2(g(x))^2-f(x)$ равно $c-\frac{1}{8}-b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{1}{4}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $\frac{7}{2}$, то второе равно $-\frac{1}{4}-\frac{7}{2}=-\frac{15}{4}$.

3. На каждой из прямых $x=2$ и $x=9$ отмечено по 400 точек с ординатами $1,2,3,\ldots,400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 321372.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 49$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 7$, $AH = 49$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 49$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 14, можно расположить $386 \cdot 2 = 772$ способами (по $400 - 14$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 50, и её можно расположить $2(400 - 50) = 700$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 700 = 1400$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 400 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 798 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $400 \cdot 798 = 319200$ способов.

Итого получаем $772 + 1400 + 319200 = 321372$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 7$ и $2\sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Ответ: $-\frac{7}{6}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = 3 \Leftrightarrow \sin(x - y) = 7\cos x \cos y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$4\sin(x - y)\cos(x - y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $7\cos x \cos y$ вместо $\sin(x - y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\cos x \cos y \neq 0$):

$$7\cos x \cos y \cos(x - y) = \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 7\cos(x - y) = \sin x \sin y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7\cos x \cos y + 7\sin x \sin y = \sin x \sin y \Leftrightarrow 7\cos x \cos y = -6\sin x \sin y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{7}{6}.$$

5. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $CL = 2, BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника BKN.

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 6$, $AB = 5\sqrt{7}$, $S_{\triangle BKN} = \frac{9\sqrt{3}}{14}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, а угол CBA через β.

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60°$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120°$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60°$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120°$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60° = 6$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120°$. Рассмотрим треугольник MKB. По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120° = 63$, $BM = 3\sqrt{7}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin 120°}$, откуда $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Тогда площадь треугольника BKN равна $\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BN \cdot \sin\beta = \frac{9\sqrt{3}}{14}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 3 : 5$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$, $\frac{3\sqrt{7}}{BA} = \frac{3}{5}$, $AB = 5\sqrt{7}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тридцати трёх последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 3168, а сумма расстояний от этих же тридцати трёх чисел до некоторого числа b равна 924. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 120$.

Ответ: $a = 26$, $a = -2$, $a = 122$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+32$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+32]$, то сумма расстояний от него до данных тридцати трёх чисел не превосходит $\frac{33}{2} \cdot 32 = 528$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 32, сумма расстояний до $k+1$ и $k+31$ не превосходит 32, сумма расстояний до $k+2$ и $k+30$ также не превосходит 32 и т.д.; расстояние до $k+16$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 16). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+32]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|33a - k - (k+1) - \ldots - (k+32)| = 33|a - k - 16|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $33|b - k - 16|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 33|a-k-16| = 3168, \\ 33|b-k-16| = 924, \\ a+b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-16| = 96, \\ |b-k-16| = 28, \\ a+b = 120. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+32]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-16 = 96, \\ b-k-16 = 28, \\ a+b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 94, \\ b = 26, \\ k = -18. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+32]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+16 = 96, \\ -b+k+16 = 28, \\ a+b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26, \\ b = 94, \\ k = 106. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+32]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-16 = 96, \\ -b+k+16 = 28, \\ a+b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 122, \\ b = -2, \\ k = 10. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+32]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+16 = 96, \\ b-k-16 = 28, \\ a+b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = 122, \\ k = 78. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 26$, $a = 122$, $a = -2$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K, что $C_1K = 9, KD_1 = 4$.

   а) Найдите длину ребра A_1A.

   б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

   Ответ: $A_1A = 18, V = 3888, R = 3\sqrt{13}$.

   Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром B_1C_1. Отрезки C_1K и C_1F равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина B_1C_1 и $B_1C_1 = 2 \cdot C_1F = 2 \cdot C_1K = 18$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1 = CC_1 = B_1C_1 = 18$.

   б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1. Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами A_1D_1 через M, а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $A_1B_1C_1D_1$, через ω. Пусть O – центр ω.

   Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OC_1D_1 + \angle OD_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle FC_1D_1 + \angle MD_1C_1) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OC_1D_1 прямоугольный, $OK = \sqrt{C_1K \cdot D_1K} = 6$.

   Площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ равна $B_1C_1 \cdot FM = 2 \cdot C_1F \cdot 2 \cdot OK = 2 \cdot 9 \cdot 12 = 216$. объём параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1} = 18 \cdot 216 = 3888$.

   Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 3\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 3

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2-10x+21)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-7}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-3}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x=8$.

Решение. Заметим, что *на ОДЗ* сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2}\left(\frac{x^2}{x-3}\cdot\frac{x^2}{x-7}(x^2-10x+21)\right)=\log_{x^2}x^4=2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=a+b$ и $a+b+c=2$, откуда следует, что $c=1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{x^2}{x-7}, \\ x^2=\dfrac{x^2}{x-3}, \\ x^2=x^2-10x+21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=8, \\ x=4, \\ x=\dfrac{21}{10}. \end{array}\right.$$

Из найденных значений переменной только $x=8$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2+5f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2+5g(x)$ равно -17.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq 0$. Рассмотрим $h(x)=(f(x))^2+5g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x)=(ax+b)^2+5(ax+c)=a^2x^2+a(2b+5)x+b^2+5c$. График $y=h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}}=-\frac{2b+5}{2a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}})=-5b-\frac{25}{4}+5c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2+5f(x)$ равно $-5c-\frac{25}{4}+5b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{25}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно -17, то второе равно $-\frac{25}{2}+17=\frac{9}{2}$.

3. На каждой из прямых $y=1$ и $y=12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1,2,3,\ldots,200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 80268.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 121$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 11$, $AH = 121$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 121$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 22, можно расположить $178 \cdot 2 = 356$ способами (по $200 - 22$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 122, и её можно расположить $2(200 - 122) = 156$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 156 = 312$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 200 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 398 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $200 \cdot 398 = 79600$ способов.

Итого получаем $356 + 312 + 79600 = 80268$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2$ и $5\sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Ответ: $-\frac{6}{5}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\cos x \sin y - \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = 3 \Leftrightarrow -\sin(x - y) = 2\sin x \sin y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$10\sin(x - y)\cos(x - y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $-2\sin x \sin y$ вместо $\sin(x - y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\sin x \sin y \neq 0$):

$$-20\sin x \sin y \cos(x - y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow -5\cos(x - y) = \cos x \cos y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\cos x \cos y + 5\sin x \sin y = -\cos x \cos y \Leftrightarrow 6\cos x \cos y = -5\sin x \sin y.$$

Из последнего равенства следует, что $\cos x \cos y \neq 0$, поэтому выражение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ существует и $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{6}{5}$.

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1, AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника CMN.

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 3$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол BAC через α.

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60°$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120°$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60°$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120°$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60° = 3$.

$\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, следовательно, треугольник MOL – равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник ALM. По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2\cdot AL\cdot LM\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 21$. По теореме синусов $\frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{LM}{\sin\alpha}$, откуда $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. Так как угол α лежит напротив меньшей стороны треугольника, то он острый. Из треугольника ACH получаем, что $CH = AC\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM\cdot AN$, откуда $AN = \frac{36}{\sqrt{21}}$, $MN = AN - AM = \frac{15}{\sqrt{21}}$. Тогда площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2}\cdot CH\cdot MN = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 7$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{7}$, $\frac{BA-\sqrt{21}}{BA} = \frac{3}{7}$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 98$.

Ответ: $a = 107$, $a = -9$, $a = 25$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+10$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+10]$, то сумма расстояний от него до данных одиннадцати чисел не превосходит $\frac{11}{2}\cdot 10 = 55$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 10, сумма расстояний до $k+1$ и $k+9$ не превосходит 10, сумма расстояний до $k+2$ и $k+8$ также не превосходит 6 и т.д.; расстояние до $k+5$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 5). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+10]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|11a - k - (k+1) - \ldots - (k+10)| = 11|a - k - 5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $11|b - k - 5|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 11|a-k-5| = 902, \\ 11|b-k-5| = 374, \\ a+b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-5| = 82, \\ |b-k-5| = 34, \\ a+b = 98. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-5 = 82, \\ b-k-5 = 34, \\ a+b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 73, \\ b = 25, \\ k = -14. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+5 = 82, \\ -b+k+5 = 34, \\ a+b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 25, \\ b = 73, \\ k = 102. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-5 = 82, \\ -b+k+5 = 34, \\ a+b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 107, \\ b = -9, \\ k = 20. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+5=82, \\ b-k-5=34, \\ a+b=98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-9, \\ b=107, \\ k=68. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a=25$, $a=107$, $a=-9$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K, что $CK=4, KD=1$.

а) Найдите длину ребра A_1A.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

Ответ: $A_1A=8, V=256, R=2\sqrt{5}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром BC. Отрезки CK и CF равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина BC и $BC=2\cdot CF=2\cdot CK=4$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1=CC_1=BC=4$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1. Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами AD через M, а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $ABCD$, через ω. Пусть O – центр ω.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle FCD + \angle MDC) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OCD прямоугольный, $OK=\sqrt{CK\cdot DK}=2$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $BC\cdot FM = 2\cdot CF\cdot 2\cdot OK = 2\cdot 4\cdot 4 = 32$. объём параллелепипеда равен $AA_1\cdot S_{ABCD} = 8\cdot 32 = 256$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK=\sqrt{OK^2+OQ^2}=\sqrt{OK^2+\frac{1}{4}AA_1^2}=2\sqrt{5}$.

БИЛЕТ 4

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}\left(x^2-7x+10\right)$, $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2}\frac{x^2}{x-5}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x=6$.

Решение. Заметим, что *на ОДЗ* сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2}\left(\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{x^2}{x-5}\left(x^2-7x+10\right)\right)=\log_{x^2}x^4=2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=a+b$ и $a+b+c=2$, откуда следует, что $c=1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{x^2}{x-2}, \\ x^2=\dfrac{x^2}{x-5}, \\ x^2=x^2-7x+10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \\ x=6, \\ x=\dfrac{10}{7}. \end{array}\right.$$

Из найденных значений переменной только $x=6$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2-3f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2-3g(x)$ равно $\frac{11}{2}$.

Ответ: -10.

Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq 0$. Рассмотрим $h(x)=(f(x))^2-3g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x)=(ax+b)^2-3(ax+c)=a^2x^2+a(2b-3)x+b^2-3c$. График $y=h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}}=-\frac{2b-3}{2a}$; ордината вершины равна $h\left(x_{\text{в}}\right)=3b-\frac{9}{4}-3c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2-3f(x)$ равно $3c-\frac{9}{4}-3b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{9}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $\frac{11}{2}$, то второе равно $-\frac{9}{2}-\frac{11}{2}=-10$.

3. На каждой из прямых $x=2$ и $x=15$ отмечено по 400 точек с ординатами $1,2,3,\ldots,400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 320868.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 169$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 13$, $AH = 169$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 169$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 26, можно расположить $374{\cdot}2 = 748$ способами (по $400 - 26$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 170, и её можно расположить $2(400 - 170) = 460$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 460 = 920$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 400 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 798 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $400 \cdot 798 = 319200$ способов.

Итого получаем $748 + 920 + 319200 = 320868$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$ и $3\sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = 4 \Leftrightarrow \sin(x + y) = 4\cos x \cos y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$6\sin(x + y)\cos(x + y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $4\cos x \cos y$ вместо $\sin(x + y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\cos x \cos y \neq 0$):

$$24\cos x \cos y \cos(x + y) = 4\sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 6\cos(x + y) = \sin x \sin y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\cos x \cos y - 6\sin x \sin y = \sin x \sin y \Leftrightarrow 6\cos x \cos y = 7\sin x \sin y.$$

Из последнего равенства следует, что $\sin x \sin y \neq 0$, поэтому выражение $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$ существует и $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{7}{6}$.

5. Окружность Γ радиуса $4\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $CL = 4$, $BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника BKN.

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 12$, $AB = 7\sqrt{21}$, $S_{\triangle BKN} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, а угол CBA через β.

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 12$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120^\circ$. Рассмотрим треугольник MKB. По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120^\circ = 189$, $BM = 3\sqrt{21}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}$, откуда $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{3}{\sqrt{21}}$. Тогда площадь треугольника BKN равна $\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BN \cdot \sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 3 : 7$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{7}$, $\frac{3\sqrt{21}}{BA} = \frac{3}{7}$, $AB = 7\sqrt{21}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1624, а сумма расстояний от этих же двадцати девяти чисел до некоторого числа b равна 1305. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 115$.

Ответ: $a = 52$, $a = 108$, $a = 7$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+28$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+28]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати девяти чисел не превосходит $\frac{29}{2} \cdot 28 = 406$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 28, сумма расстояний до $k+1$ и $k+27$ не превосходит 28, сумма расстояний до $k+2$ и $k+26$ также не превосходит 28 и т.д.; расстояние до $k+14$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 14). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+28]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|29a - k - (k+1) - \ldots - (k+28)| = 29|a-k-14|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $29|b-k-14|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 29|a-k-14| = 1624, \\ 29|b-k-14| = 1305, \\ a+b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-14| = 56, \\ |b-k-14| = 45, \\ a+b = 115. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-14 = 56, \\ b-k-14 = 45, \\ a+b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 63, \\ b = 52, \\ k = -7. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+14 = 56, \\ -b+k+14 = 45, \\ a+b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 52, \\ b = 63, \\ k = 94. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-14 = 56, \\ -b+k+14 = 45, \\ a+b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 108, \\ b = 7, \\ k = 38. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\, k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+14=56, \\ b-k-14=45, \\ a+b=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7, \\ b=108, \\ k=49. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a=52$, $a=108$, $a=7$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K, что $C_1K=16, KD_1=1$.

а) Найдите длину ребра A_1A.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы Ω.

Ответ: $A_1A=32, V=8192, R=4\sqrt{17}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром B_1C_1. Отрезки C_1K и C_1F равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина B_1C_1 и $B_1C_1=2\cdot C_1F=2\cdot C_1K=32$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1=CC_1=B_1C_1=32$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1. Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами A_1D_1 через M, а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $A_1B_1C_1D_1$, через ω. Пусть O – центр ω.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OC_1D_1+\angle OD_1C_1=\frac{1}{2}(\angle FC_1D_1+\angle MD_1C_1)=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$. Таким образом, треугольник OC_1D_1 прямоугольный, $OK=\sqrt{C_1K\cdot D_1K}=4$.

Площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ равна $B_1C_1\cdot FM=2\cdot C_1F\cdot 2\cdot OK=2\cdot 16\cdot 8=256$. объём параллелепипеда равен $AA_1\cdot S_{A_1B_1C_1D_1}=32\cdot 256=8192$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK=\sqrt{OK^2+OQ^2}=\sqrt{OK^2+\frac{1}{4}AA_1^2}=4\sqrt{17}$.

БИЛЕТ 9

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $x=\frac{7}{2}$, $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Заметим, что *на ОДЗ* произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\cdot\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)\cdot\log_{x-3}x=1$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=ab$ и $abc=1$, откуда следует, что $c^2=1$, $c=\pm1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ±1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ±1, то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ±1, т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x, поэтому они отличны от 1.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1, когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=1,\\ x(x-3)=1,\\ (x-3)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=-\dfrac{1}{2},\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\\ x=\dfrac{7}{2},\\ x=1. \end{array}\right.$$

Из найденных значений переменной только $x=\frac{7}{2}$ и $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

Ответ: $A=-7$, $A=0$.

Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq0$. Касание графиков $y=(f(x))^2$ и $y=7g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2=7g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2=7(ax+c)$, $a^2x^2+a(2b-7)x+b^2-7c=0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2(2b-7)^2-4a^2\left(b^2-7c\right)=7a^2(7-4b+4c)$, откуда $4b-4c=7$.

Аналогично, касание графиков $y=(g(x))^2$ и $y=Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2=Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax+c)^2=A(ax+b)$, $a^2x^2+a(2c-A)x+c^2-Ab=0$. Дискриминант равен $D=a^2(2c-A)^2-4a^2\left(c^2-Ab\right)=a^2A(A-4c+4b)$. Он обращается в ноль при $A=0$ и $A=4c-4b=-7$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47}.

Ответ: 5111.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-3^a)\left(x-3^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geqslant b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(3^a+3^b\right)x+3^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 3^a+3^b \leqslant 27^{47}, \\ 3^{a+b} \leqslant 27^{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^a+3^b \leqslant 3^{141}, \\ a+b \leqslant 141. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=141$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$\begin{gathered} a=141 \Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a=140 \Rightarrow 2 \text{ значения } b\ (b \in \{0;1\}); \\ a=139 \Rightarrow 3 \text{ значения } b\ (b \in \{0;1;2\}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a=71 \Rightarrow 71 \text{ значение } b\ (b \in \{0;1;\dots;70\}); \\ a=70 \Rightarrow 71 \text{ значение } b\ (b \in \{0;1;\dots;70\}); \\ a=69 \Rightarrow 70 \text{ значений } b\ (b \in \{0;1;\dots;69\}); \\ a=68 \Rightarrow 69 \text{ значений } b\ (b \in \{0;1;\dots;68\}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a=1 \Rightarrow 2 \text{ значения } b\ (b \in \{0;1\}); \\ a=0 \Rightarrow 1 \text{ значение } b\ (b=0). \end{gathered}$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\dots 71)+(71+70+69+\dots+1)=5111$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-$ $-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y+\sin x$?

Ответ: $-1-\sin\frac{3\pi}{8}=-1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y=2\sin x\cos x-2\sin 3x\sin x \Leftrightarrow \sin 2y=2\sin x(\cos x-\sin 3x).$$

Подставляя сюда $-\cos y$ вместо $\cos x-\sin 3x$, получаем $\sin 2y=-2\sin x\cos y$, $2\sin y\cos y+$ $2\sin x\cos y=0$, $\cos y(\sin y+\sin x)=0$, откуда есть две возможности.

1) $\sin x+\sin y=0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\cos y=0$. Тогда $y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\cos x-\sin 3x=0 \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{2}-3x+2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}-\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тогда минимальное значение суммы $\sin y + \sin x$ принимается при $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $-1 - \sin\frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin\frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos\frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\min(\sin x + \sin y) = -1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

Ответ: $AD = 10, BK = \frac{48}{5}, P_{EBM} = \frac{84}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Радиус окружности равен 5, значит, $EK = AB = 10$; $AD = AB = 10$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 6$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 10\cdot\frac{24}{25} = \frac{48}{5}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 10\cdot\frac{7}{25} = \frac{14}{5}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 8$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $6 + 8 + \frac{14}{5} = \frac{84}{5}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{5}{4}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+15$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+15]$, то сумма расстояний от него до данных шестнадцати чисел не превосходит $8\cdot 15 = 120$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 15, сумма расстояний до $k+1$ и $k+14$ не превосходит 15, сумма расстояний до $k+2$ и $k+13$ также не превосходит 15 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k+15]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|16a - k - (k+1) - \ldots - (k+15)| = |16a - 16k - 120|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|16a^2 - 16k - 120|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |16a^2 - 16k - 120| = 591, \\ |16a - 16k - 120| = 636. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда

$$\begin{cases}16a^2-16k-120=591,\\ 16a-16k-120=636\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16a-16k-120=636,\\ 16a^2-16a+45=0.\end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда

$$\begin{cases}16k+120-16a^2=591,\\ 16k+120-16a=636\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16k+120-16a=636,\\ 16a^2-16a-45=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=a+32{,}25,\\ \left[\begin{array}{l}a=-1{,}25,\\ a=2{,}25\end{array}\right.\end{cases}$$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то подходит только случай $a=-1{,}25$ (тогда $k=31$); в случае $a=2{,}25$ оказывается, что $k=34{,}5$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+15]$. Тогда

$$\begin{cases}16a^2-16k-120=591,\\ 16k+120-16a=636\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16k+120-16a=636,\\ 16a^2-16a-1227=0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $2a^2-2a-\frac{1227}{8}=0$; $D=4+1227=1231$; $a=\frac{2\pm\sqrt{1231}}{4}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a>a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a=-1{,}25=-\frac{5}{4}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=24$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1=26$, $R=5$, $V=1250$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка C_1M – лежит в грани BCC_1B_1, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок C_1M не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани CC_1D_1D (касание означало бы, что $MC_1\perp CC_1D_1D$, и отсюда следовало бы, что плоскости CC_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и ABB_1A_1, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм BB_1C_1C. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1C_1=BC=BM+MC=1+24=25$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1T=B_1C_1=25$, $BT=BM=1$. Значит, $CC_1=BB_1=BT+TB_1=26$. По теореме Пифагора для треугольника CC_1M находим, что $C_1M=\sqrt{CC_1^2-CM^2}=10$, откуда радиус сферы равен 5.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем BCC_1B_1; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани BCC_1B_1 и она касается грани AA_1D_1D). Площадь основания равна $C_1M\cdot BC=10\cdot25=250$. Следовательно, $V=5\cdot250=1250$.

БИЛЕТ 10

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4}x$ равно произведению двух остальных.

   Ответ: $x=\frac{9}{2}$, $x=2+\sqrt{5}$.

   Решение. Заметим, что *на ОДЗ* произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\cdot\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)\cdot\log_{x-3}x=1$$

   Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=ab$ и $abc=1$, откуда следует, что $c^2=1$, $c=\pm1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ±1.

   Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ±1, то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ±1, т.е. первому логарифму.

   Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x, поэтому они отличны от 1.

   Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1, когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=1,\\ x(x-4)=1,\\ (x-4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4},\\ x=2\pm\sqrt{5},\\ x=\dfrac{9}{2},\\ x=2.\end{array}\right.$$

   Из найденных значений переменной только $x=\frac{9}{2}$ и $x=2+\sqrt{5}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-12g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

   Ответ: $A=12$, $A=0$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq0$. Касание графиков $y=(f(x))^2$ и $y=-12g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2=-12g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2=-12(ax+c)$, $a^2x^2+2a(b+6)x+b^2+12c=0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b+6)^2-a^2\left(b^2+12c\right)=12a^2(3+b-c)$, откуда $b-c=-3$.

   Аналогично, касание графиков $y=(g(x))^2$ и $y=Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2=Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax+c)^2=A(ax+b)$, $a^2x^2+a(2c-A)x+c^2-Ab=0$. Дискриминант равен $D=a^2(2c-A)^2-4a^2\left(c^2-Ab\right)=a^2A(A-4c+4b)$. Он обращается в ноль при $A=0$ и $A=4c-4b=12$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85}.

Ответ: 16511.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-5^a)\left(x-5^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geqslant b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(5^a+5^b\right)x+5^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 5^a+5^b \leqslant 125^{85}, \\ 5^{a+b} \leqslant 125^{85} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a+5^b \leqslant 5^{255}, \\ a+b \leqslant 255. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=255$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$\begin{gathered} a=255 \Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a=254 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\}); \\ a=253 \Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1;2\}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a=128 \Rightarrow 128 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;127\}); \\ a=127 \Rightarrow 128 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;127\}); \\ a=126 \Rightarrow 127 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;126\}); \\ a=125 \Rightarrow 126 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;125\}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a=1 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\}); \\ a=0 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b=0). \end{gathered}$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\ldots 128)+(128+127+126+\ldots+1)=16511$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x= =\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\sin y+\cos x$?

Ответ: $1+\sin\frac{3\pi}{8}=1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y=2\sin x\cos x+2\cos 3x\cos x \Leftrightarrow \sin 2y=2\cos x(\sin x+\cos 3x).$$

Подставляя сюда $-\cos y$ вместо $\sin x+\cos 3x$, получаем $\sin 2y=-2\cos x\cos y$, $2\sin y\cos y+2\cos x\cos y=0$, $\cos y(\sin y+\cos x)=0$, откуда есть две возможности.

1) $\cos x+\sin y=0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\cos y=0$. Тогда $y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\sin x+\cos 3x=0 \Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ 3x=-x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \\ x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тогда максимальное значение суммы $\sin y+\cos x$ принимается при $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x= \frac{3\pi}{8}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $1+\sin\frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin\frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos\frac{3\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\max(\cos x+\sin y)=1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 17 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 8. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

   Ответ: $AD = 17, BK = \frac{240}{17}, P_{EBM} = \frac{552}{17}$.

   Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

   В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

   Диаметр окружности равен 17, значит, $EK = AB = 17$; $AD = AB = 17$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 8$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 15$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{15}{17}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{8}{17}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{240}{289}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{161}{289}$.

   Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 17 \cdot \frac{240}{289} = \frac{240}{17}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 17 \cdot \frac{161}{289} = \frac{161}{17}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 15$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $15 + 8 + \frac{161}{17} = \frac{552}{17}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1926, а сумма расстояний от этих же двадцати семи чисел до числа a^2 равна 1932. Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = \frac{2}{3}$.

   Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+26$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+26]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати семи чисел не превосходит $\frac{27}{2} \cdot 26 = 351$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 26, сумма расстояний до $k+1$ и $k+25$ не превосходит 26, сумма расстояний до $k+2$ и $k+24$ также не превосходит 26 и т.д.; расстояние до $k+13$ не превосходит половины длины отрезка, т.е. 13). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+26]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|27a - k - (k+1) - \ldots - (k+26)| = |27a - 27k - 351|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|27a^2 - 27k - 351|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |27a^2 - 27k - 351| = 1932, \\ |27a - 27k - 351| = 1926. \end{cases}$$

   Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

   1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27a^2 - 27k - 351 = 1932, \\ 27a - 27k - 351 = 1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a - 27k - 351 = 1926, \\ 27a^2 - 27a - 6 = 0. \end{cases}$$

   Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2 - 3a - \frac{2}{3} = 0$; $D = 9 + 8 = 17$; $a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27k+351-27a^2=1932, \\ 27k+351-27a=1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27k+351-27a=1926, \\ 9a^2-9a+2=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=a+58\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3}, \\ a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то подходит только случай $a=\frac{2}{3}$ (тогда $k=59$); в случае $a=\frac{1}{3}$ оказывается, что $k=58\frac{2}{3}$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27a^2-27k-351=1932, \\ 27k+351-27a=1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27k+351-27a=1926, \\ 9a^2-9a-1286=0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2-3a-\frac{1286}{3}=0$; $D=9+4\cdot1286=5153$; $a=\frac{3\pm\sqrt{5153}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+15]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a>a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a=\frac{2}{3}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=15$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1=17$, $R=4$, $V=512$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка C_1M – лежит в грани BCC_1B_1, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок C_1M не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани CC_1D_1D (касание означало бы, что $MC_1\perp CC_1D_1D$, и отсюда следовало бы, что плоскости CC_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и ABB_1A_1, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм BB_1C_1C. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1C_1=BC=BM+MC=1+15=16$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1T=B_1C_1=16$, $BT=BM=1$. Значит, $CC_1=BB_1=BT+TB_1=17$. По теореме Пифагора для треугольника CC_1M находим, что $C_1M=\sqrt{CC_1^2-CM^2}=8$, откуда радиус сферы равен 4.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем BCC_1B_1; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани BCC_1B_1 и она касается грани AA_1D_1D). Площадь основания равна $C_1M\cdot BC=8\cdot16=128$. Следовательно, $V=4\cdot128=512$.

БИЛЕТ 11

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{13}{6}\right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

   Ответ: $x=\frac{11}{3}$, $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

   Решение. Заметим, что *на ОДЗ* произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x\left(x-\tfrac{13}{6}\right)\cdot\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)\cdot\log_{x-3} x=1$$

   Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=ab$ и $abc=1$, откуда следует, что $c^2=1$, $c=\pm1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ±1.

   Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ±1, то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ±1, т.е. первому логарифму.

   Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x, поэтому они отличны от 1.

   Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1, когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x\left(x-\dfrac{13}{6}\right)=1,\\ x(x-3)=1,\\ (x-3)\left(x-\dfrac{13}{6}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13\pm\sqrt{313}}{12},\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\\ x=\dfrac{11}{3},\\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

   Из найденных значений переменной только $x=\frac{11}{3}$ и $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

   Ответ: $A=-4$, $A=0$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq0$. Касание графиков $y=(f(x))^2$ и $y=4g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2=4g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2=4(ax+c)$, $a^2x^2+2a(b-2)x+b^2-4c=0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b-2)^2-a^2\left(b^2-4c\right)=4a^2(c-b+1)$, откуда $b-c=1$.

   Аналогично, касание графиков $y=(g(x))^2$ и $y=Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2=Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax+c)^2=A(ax+b)$, $a^2x^2+a(2c-A)x+c^2-Ab=0$. Дискриминант равен $D=a^2(2c-A)^2-4a^2\left(c^2-Ab\right)=a^2A(A-4c+4b)$. Он обращается в ноль при $A=0$ и $A=4c-4b=-4$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68}.

Ответ: 4760.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-7^a)\left(x-7^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geqslant b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(7^a+7^b\right)x+7^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 7^a+7^b \leqslant 49^{68}, \\ 7^{a+b} \leqslant 49^{68} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^a+7^b \leqslant 7^{136}, \\ a+b \leqslant 136. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=136$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$\begin{gathered}
a=136 \Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\
a=135 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\}); \\
a=134 \Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1;2\}); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a=69 \Rightarrow 68 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\dots;67\}); \\
a=68 \Rightarrow 69 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\dots;68\}); \\
a=67 \Rightarrow 68 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\dots;67\}); \\
a=66 \Rightarrow 67 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\dots;66\}); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a=1 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\}); \\
a=0 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b=0).
\end{gathered}$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\dots 69)+(68+67+66+\dots+1)=4760$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-$ $-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y+\sin x$?

Ответ: $-1-\sin\frac{3\pi}{8}=-1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y=2\sin x\cos x-2\sin 3x\sin x \Leftrightarrow \sin 2y=2\sin x(\cos x-\sin 3x).$$

Подставляя сюда $-\sin y$ вместо $\cos x-\sin 3x$, получаем $\sin 2y=-2\sin x\sin y$, $2\sin y\cos y+2\sin x\sin y=0$, $\sin y(\cos y+\sin x)=0$, откуда есть две возможности.

1) $\sin x+\cos y=0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\sin y=0$. Тогда $y=\pi n, n\in\mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\cos x-\sin 3x=0 \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{2}-3x+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}-\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тогда минимальное значение суммы $\cos y + \sin x$ принимается при $y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $-1 - \sin\frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin\frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos\frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\min(\sin x + \sin y) = -1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника EBM.

Ответ: $BC = 5, BK = \frac{24}{5}, P_{EBM} = \frac{42}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 5, значит, $EK = AB = 5$; $BC = AB = 5$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 3$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 4$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 5\cdot\frac{24}{25} = \frac{24}{5}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 5\cdot\frac{7}{25} = \frac{7}{5}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 4$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $3 + 4 + \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{7}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+17$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+17]$, то сумма расстояний от него до данных восемнадцати чисел не превосходит $9\cdot 17 = 153$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 17, сумма расстояний до $k+1$ и $k+16$ не превосходит 17, сумма расстояний до $k+2$ и $k+15$ также не превосходит 17 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+17]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|18a - k - (k+1) - \ldots - (k+17)| = |18a - 18k - 153|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|18a^2 - 18k - 153|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |18a^2 - 18k - 153| = 865, \\ |18a - 18k - 153| = 1005. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18a^2-18k-153=865, \\ 18a-18k-153=1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a-18k-153=1005, \\ 9a^2-9a+70=0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18k+153-18a^2=865, \\ 18k+153-18a=1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18k+153-18a=1005, \\ 9a^2-9a-70=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=a+47\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{7}{3}, \\ a=\dfrac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то подходит только случай $a=-\frac{7}{3}$ (тогда $k=45$); в случае $a=\frac{10}{3}$ оказывается, что $k=50\frac{2}{3}$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18a^2-18k-153=865, \\ 18k+153-18a=1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18k+153-18a=1005, \\ 9a^2-9a-935=0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2-3a-\frac{935}{3}=0$; $D=9+4\cdot 935=3749$; $a=\frac{3\pm\sqrt{3749}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+17]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a>a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a=-\frac{7}{3}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=8$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $R=3$, $AA_1=10$, $V=162$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка C_1M – лежит в грани BCC_1B_1, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок C_1M не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани CC_1D_1D (касание означало бы, что $MC_1\perp CC_1D_1D$, и отсюда следовало бы, что плоскости CC_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и ABB_1A_1, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм BB_1C_1C. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1C_1=BC=BM+MC=1+8=9$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1T=B_1C_1=9$, $BT=BM=1$. Значит, $CC_1=BB_1=BT+TB_1=10$. По теореме Пифагора для треугольника CC_1M находим, что $C_1M=\sqrt{CC_1^2-CM^2}=6$, откуда радиус сферы равен 3.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем BCC_1B_1; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани BCC_1B_1 и она касается грани AA_1D_1D). Площадь основания равна $C_1M\cdot BC=6\cdot 9=54$. Следовательно, $V=3\cdot 54=162$.

БИЛЕТ 12

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{1}{3}\right)$, $\log_{x-\frac{1}{3}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

   Ответ: $x=\frac{10}{3}$, $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

   Решение. Заметим, что *на ОДЗ* произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\log_{x-\frac{1}{3}}(x-3)\cdot\log_{x-3} x=1$$

   Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c, а два оставшихся числа через a и b. Тогда $c=ab$ и $abc=1$, откуда следует, что $c^2=1$, $c=\pm1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ±1.

   Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ±1, то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ±1, т.е. первому логарифму.

   Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x, поэтому они отличны от 1.

   Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1, когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=1,\\ x(x-3)=1,\\ (x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6},\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\\ x=\dfrac{10}{3},\\ x=0. \end{array}\right.$$

   Из найденных значений переменной только $x=\frac{10}{3}$ и $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-6g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

   Ответ: $A=6$, $A=0$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$, $g(x)=ax+c$, где $a\neq0$. Касание графиков $y=(f(x))^2$ и $y=-6g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2=-6g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2=-6(ax+c)$, $a^2x^2+2a(b+3)x+b^2-7c=0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b+3)^2-a^2\left(b^2+6c\right)=a^2(6b-6c+9)$, откуда $2b-2c=-3$.

   Аналогично, касание графиков $y=(g(x))^2$ и $y=Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2=Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax+c)^2=A(ax+b)$, $a^2x^2+a(2c-A)x+c^2-Ab=0$. Дискриминант равен $D=a^2(2c-A)^2-4a^2\left(c^2-Ab\right)=a^2A(A-4c+4b)$. Он обращается в ноль при $A=0$ и $A=4c-4b=6$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень,

все их корни являются степенями числа 11 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 1331^{38}.

Ответ: 3363.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-11^a)\left(x-11^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geqslant b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(11^a+11^b\right)x+11^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 11^a+11^b \leqslant 1331^{38}, \\ 11^{a+b} \leqslant 1331^{38} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11^a+11^b \leqslant 11^{114}, \\ a+b \leqslant 114. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=114$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$a=114 \Rightarrow 0 \text{ значений } b;$$
$$a=113 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\});$$
$$a=112 \Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1;2\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a=58 \Rightarrow 57 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;56\});$$
$$a=57 \Rightarrow 58 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;57\});$$
$$a=56 \Rightarrow 57 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;56\});$$
$$a=55 \Rightarrow 56 \text{ значений } b \ (b \in \{0;1;\ldots;55\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a=1 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0;1\});$$
$$a=0 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b=0).$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\ldots 58)+(57+56+55+\ldots+1)=3363$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x= =\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\cos y+\cos x$?

Ответ: $1+sin\frac{3\pi}{8}=1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y=2\sin x\cos x+2\cos 3x\cos x \Leftrightarrow \sin 2y=2\cos x(\sin x+\cos 3x).$$

Подставляя сюда $-\sin y$ вместо $\sin x+\cos 3x$, получаем $\sin 2y=-2\cos x\sin y$, $2\sin y\cos y+2\cos x\sin y=0$, $\sin y(\cos y+\cos x)=0$, откуда есть две возможности.

1) $\cos x+\cos y=0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\sin y=0$. Тогда $y=\pi n, n\in\mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\sin x+\cos 3x=0 \Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+\frac{\pi}{2}+2\pi k, \\ 3x=-x-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тогда максимальное значение суммы $\cos y+\cos x$ принимается при $y=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{3\pi}{8}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, и оно равно $1+\sin\frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin\frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos\frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\max(\cos x + \sin y) = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 5. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

Ответ: $AD = 13, BK = \frac{120}{13}, P_{EBM} = \frac{340}{13}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 13, значит, $EK = AB = 13$; $AD = AB = 13$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 5$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 12$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{5}{13}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{119}{169}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 13\cdot\frac{120}{169} = \frac{120}{13}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 13\cdot\frac{119}{169} = \frac{119}{13}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 12$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $5 + 12 + \frac{119}{13} = \frac{340}{13}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати пяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1270, а сумма расстояний от этих же двадцати пяти чисел до числа a^2 равна 1234. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{4}{5}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+24$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+24]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати пяти чисел не превосходит $\frac{25}{2}\cdot 24 = 300$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 24, сумма расстояний до $k+1$ и $k+23$ не превосходит 24, сумма расстояний до $k+2$ и $k+22$ также не превосходит 24 и т.д.; расстояние до $k+12$ не превосходит половины длины отрезка, т.е. 12). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+24]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|25a - k - (k+1) - \ldots - (k+24)| = |25a - 25k - 300|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|25a^2 - 25k - 300|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |25a^2 - 25k - 300| = 1234, \\ |25a - 25k - 300| = 1270. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25a^2 - 25k - 300 = 1234, \\ 25a - 25k - 300 = 1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a - 25k - 300 = 1270, \\ 25a^2 - 25a + 36 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25k+300-25a^2=1234, \\ 25k+300-25a=1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k+300-25a=1270, \\ 25a^2-25a-36=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=a+38{,}8, \\ \left[\begin{array}{l} a=-0{,}8, \\ a=1{,}8 \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то подходит только случай $a=-0{,}8$ (тогда $k=38$); в случае $a=1{,}8$ оказывается, что $k=40{,}6$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25a^2-25k-300=1234, \\ 25k+300-25a=1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k+300-25a=1270, \\ 25a^2-25a-2504=0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $5a^2-5a-\frac{2504}{5}=0$; $D=25+4\cdot 2504=10041$; $a=\frac{5\pm\sqrt{10041}}{10}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+24]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a>a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a=-0{,}8=-\frac{4}{5}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=3$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1=5$, $R=2$, $V=32$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка C_1M – лежит в грани BCC_1B_1, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок C_1M не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани CC_1D_1D (касание означало бы, что $MC_1\perp CC_1D_1D$, и отсюда следовало бы, что плоскости CC_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и ABB_1A_1, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм BB_1C_1C. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1C_1=BC=BM+MC=1+3=4$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1T=B_1C_1=4$, $BT=BM=1$. Значит, $CC_1=BB_1=BT+TB_1=5$. По теореме Пифагора для треугольника CC_1M находим, что $C_1M=\sqrt{CC_1^2-CM^2}=4$, откуда радиус сферы равен 2.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем BCC_1B_1; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани BCC_1B_1 и она касается грани AA_1D_1D). Площадь основания равна $C_1M\cdot BC=4\cdot 4=16$. Следовательно, $V=2\cdot 16=32$.