БИЛЕТ 5

1. Каких целых чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на $\dfrac{5^{21}-5}{4}$.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 20$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 21-значные числа, не превосходящие $8 \cdot 10^{20}$. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $4 \cdot 5^{20}$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $3 \cdot 5^{20} + 1$ (не забываем учесть само число $8 \cdot 10^{20}$).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{19}+5^{20}-1 = \dfrac{5^{21}-1}{5-1} - 1 = \dfrac{5^{21}-5}{4}$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.

Ответ: -7.

Решение. Пусть $f(x) = ax+b$, $g(x) = ax+c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + 2g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + 2(ax+c) = a^2x^2 + 2a(b+1)x + b^2 + 2c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{b+1}{a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -2b - 1 + 2c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-2c-1+2b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна -2, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно 5, то второе равно $-2-5=-7$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = 10$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 20 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 5$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 5$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^2 - x_2^2 + \frac{250}{19} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2) + \frac{250(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{19(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $-a + \frac{250}{19} \cdot \frac{a^2-5}{125} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 19a - 10 = 0$, откуда $a = 10$ или $a = -0{,}5$. Неравенству $a^2 - 20 > 0$ удовлетворяет только $a = 10$.

4. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 7908.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 4$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 2$, $AH = 4$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 4$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 4, можно расположить $58 \cdot 2 = 116$ способами (по $62 - 4$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 5, и её можно расположить $2(62-5) = 114$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 114 = 228$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 62 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 122 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $62 \cdot 122 = 7564$ способов.

Итого получаем $116 + 228 + 7564 = 7908$ способов.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: а) $AB : CD = 4 : 5$, $AB = 4$, $CD = 5$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 2 : 3$ и $BD : DC = BN : NC = 6 : 5$. Следовательно, $AB : CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = 4 : 5$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 4 - y$, $AP = AF = 4 - y$, $CQ = BC - BQ = 5 - x$, $CE = CQ = 5 - x$, $AB = AP + PB = 4 + x - y$, $CD = 5 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 4 : 5$, откуда $\frac{4+x-y}{5-x+y} = \frac{4}{5}$, $x = y$. Тогда $AB = 4$, $CD = 5$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=256$.

Ответ: $a=\frac{13}{3}$, $a=\frac{755}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+8$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+8]$, то сумма расстояний от него до данных девяти чисел не превосходит $\frac{9}{2}\cdot 8=36$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 8, сумма расстояний до $k+1$ и $k+7$ не превосходит 8, сумма расстояний до $k+2$ и $k+6$ также не превосходит 8 и т.д.; расстояние до $k+4$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 4). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+8]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|9a-k-(k+1)-\ldots-(k+8)|=9|a-k-4|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $9|b-k-4|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9|a-k-4|=294, \\ 9|b-k-4|=1932, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-4|=32\frac{2}{3}, \\ |b-k-4|=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-4=32\frac{2}{3}, \\ b-k-4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=37, \\ b=219, \\ k=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+4=32\frac{2}{3}, \\ -b+k+4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=219, \\ b=37, \\ k=247\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k; k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-4=32\frac{2}{3}, \\ -b+k+4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=251\frac{2}{3}, \\ b=4\frac{1}{3}, \\ k=215. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+4=32\frac{2}{3}, \\ b-k-4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4\frac{1}{3}, \\ b=251\frac{2}{3}, \\ k=33. \end{cases}$$

Итак, возможны два случая: $a=4\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$, $a=251\frac{2}{3}=\frac{755}{3}$.

7. В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120°. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CL, MK, AB и площадь треугольника ANL.

Ответ: $CL = 1$, $MK = 3$, $AB = 2\sqrt{13}$, $S_{\triangle ALN} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол BAC через α.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCL = \frac{1}{2}\angle ACB = 60^\circ$. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CL = OL \operatorname{ctg} \angle OCL = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$. По сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 3$.

$\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, следовательно, треугольник MOL – равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник ALM. По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2 \cdot AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13$.

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM \cdot AN$, откуда $AN = \frac{25}{\sqrt{13}}$. У треугольников ALM и ALN общая высота, проведённая из вершины L, поэтому их площади относятся как основания, т.е. как $AM : AN$. Следовательно, $S_{\triangle ALN} = S_{\triangle ALM} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot LM \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{25}{13} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 6$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA - \sqrt{13}}{BA} = \frac{1}{2}$, $AB = 2\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 6

1. Каких целых чисел от 1 до $4 \cdot 10^{25}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на $\dfrac{5^{26}-5}{4}$.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 25$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 26-значные числа, не превосходящие $4 \cdot 10^{25}$. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $2 \cdot 5^{25}$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $\cdot 5^{25}+1$ (не забываем учесть само число $4 \cdot 10^{25}$).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{24}+5^{25}-1 = \dfrac{5^{26}-1}{5-1} - 1 = \dfrac{5^{26}-5}{4}$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 8f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 8g(x)$ равно -29.

Ответ: -3.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + 8g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + 8(ax+c) = a^2x^2 + 2a(b+4)x + b^2 + 8c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{b+4}{a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -8b - 16 + 8c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-8c - 16 + 8b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна -32, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно -29, то второе равно $-32 + 29 = -3$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 - \frac{20}{3x_2^3} = x_2^2 - \frac{20}{3x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -10$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 16 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 4$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 4$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^2 - x_2^2 - \frac{20}{3} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{20(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{3(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $-a - \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2-4}{64} = 0 \Leftrightarrow 5a^2 + 48a - 20 = 0$, откуда $a = -10$ или $a = 0{,}4$. Неравенству $a^2 - 16 > 0$ удовлетворяет только $a = -10$.

4. На каждой из прямых $y = 0$ и $y = 2$ отмечено по 64 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 64$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 8420.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 4$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 2$, $AH = 4$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 4$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 4, можно расположить $60 \cdot 2 = 120$ способами (по $64 - 4$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 5, и её можно расположить $2(64-5) = 118$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 118 = 236$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 64 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 126 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $64 \cdot 126 = 8064$ способа.

Итого получаем $120 + 236 + 8064 = 8420$ способов.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{25}{7}$ и $MD = \frac{10}{7}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{3}{2}$ и $NC = \frac{9}{2}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: а) $AB : CD = 5 : 6$; б) $AB = 5$, $CD = 6$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 5 : 2$ и $BD : DC = BN : NC = 1 : 3$. Следовательно, $AB : CD = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = 5 : 6$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 5 - y$, $AP = AF = 5 - y$, $CQ = BC - BQ = 6 - x$, $CE = CQ = 6 - x$, $AB = AP + PB = 5 + x - y$, $CD = 6 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 5 : 6$, откуда $\frac{5+x-y}{6-x+y} = \frac{5}{6}$, $x = y$. Тогда $AB = 5$, $CD = 6$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восьми последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 612, а сумма расстояний от этих же восьми чисел до некоторого числа b равна 240. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=100{,}5$.

Ответ: $a=27$, $a=-3$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+7$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+8]$, то сумма расстояний от него до данных восьми чисел не превосходит $4\cdot 7=28$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 7, сумма расстояний до $k+1$ и $k+6$ не превосходит 7, сумма расстояний до $k+2$ и $k+5$ также не превосходит 7 и т.д.). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\ k+7]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|8a-k-(k+1)-\ldots-(k+7)|=8|a-k-3{,}5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $8|b-k-3{,}5|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8|a-k-3{,}5|=612, \\ 8|b-k-3{,}5|=240, \\ a+b=100{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-3{,}5|=76{,}5, \\ |b-k-3{,}5|=30, \\ a+b=100{,}5. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\ k+7]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-3{,}5=76{,}5, \\ b-k-3{,}5=30, \\ a+b=100{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=73{,}5, \\ b=27, \\ k=-6{,}5. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\ k+7]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+3{,}5=76{,}5, \\ -b+k+3{,}5=30, \\ a+b=100{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=27, \\ b=73{,}5, \\ k=100. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\ k+7]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-3{,}5=76{,}5, \\ -b+k+3{,}5=30, \\ a+b=100{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=103{,}5, \\ b=-3, \\ k=23{,}5. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\ k+7]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+3{,}5=76{,}5, \\ b-k-3{,}5=30, \\ a+b=100{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=103{,}5, \\ k=70. \end{cases}$$

Итак, возможны два случая: $a=-3$, $a=27$.

7. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а угол ACB равен $\frac{2\pi}{3}$. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CK, MK, AB и площадь треугольника CMN.

Ответ: $CK = 2$, $MK = 6$, $AB = 4\sqrt{13}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{72\sqrt{3}}{13}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол ABC через β.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCK = \frac{1}{2}\angle ACB = 60^\circ$. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CK = OK \operatorname{ctg} \angle OCK = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$. Тогда отрезок BK также равен 2. По сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 6$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120^\circ$. Рассмотрим треугольник MKB. По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120^\circ = 52$, $BM = 2\sqrt{13}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}$, откуда $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$; $CH = BC \sin\beta = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $MN = BM - BN = \frac{24}{\sqrt{13}}$. Значит, площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2}CH \cdot MN = \frac{72\sqrt{3}}{13}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 1 : 2$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$, $AB = 4\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 13

1. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 22386.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 21 штука). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_21^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 21 штука), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 210 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 17 (таких карточек $17 \cdot 22 = 374$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $374 \cdot 21 = 7854$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 18 до 49 (таких карточек $32 \cdot 21 = 672$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем $672 \cdot 21 = 14112$ вариантов.

   5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвёртого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $210 + 210 + 7854 + 14112 = 22386$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

   Ответ: $A = -11$, $A = 0$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = 11g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = 11g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2 = 11(ax+c)$, $a^2x^2 + a(2b-11)x + b^2 - 11c = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2(2b-11)^2 - 4a^2\left(b^2 - 11c\right) = 11a^2(11 - 4b + 4c)$, откуда $4b - 4c = 11$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax+c)^2 = A(ax+b)$, $a^2x^2 + a(2c-A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c-A)^2 - 4a^2\left(c^2 - Ab\right) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = -11$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2^2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1^2}.$$

   Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = 4$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2-8>0$. При этом условии по теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=2$. Тогда $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=a^2-2$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3-x_2^3+14\cdot\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}=0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+\frac{14\,(x_1-x_2)\,(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2}=0.$$

Поскольку корни различны, $x_1-x_2\neq 0$. Разделив обе части на x_1-x_2 и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2-2-\frac{14a}{4}=0 \Leftrightarrow 2a^2-7a-4=0$, откуда $a=-0{,}5$ или $a=4$. Неравенству $a^2-8>0$ удовлетворяет только $a=4$.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 343^{36}.

Ответ: 2969.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-7^a)\left(x-7^b\right)$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a>b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(7^a+7^b\right)x+7^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases}7^a+7^b\leqslant 343^{36},\\ 7^{a+b}\leqslant 343^{36}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7^a+7^b\leqslant 7^{108},\\ a+b\leqslant 108.\end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=108$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$\begin{gathered}
a=108 \Rightarrow 0 \text{ значений } b;\\
a=107 \Rightarrow 2 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1\});\\
a=106 \Rightarrow 3 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1;2\});\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a=55 \Rightarrow 54 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1;\ldots;53\});\\
a=54 \Rightarrow 54 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1;\ldots;53\});\\
a=53 \Rightarrow 53 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1;\ldots;52\});\\
a=52 \Rightarrow 52 \text{ значения } b\ (b\in\{0;1;\ldots;51\});\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a=1 \Rightarrow 1 \text{ значение } b\ (b=0);\\
a=0 \Rightarrow 0 \text{ значений } b.
\end{gathered}$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\ldots 54)+(54+53+52+\ldots+1)=2969$ вариантов.

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 4, $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 10$.

Ответ: $AP : PC = 4$, $BD = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle PBC = \angle PAD$, $\angle PCB = \angle PDA$. Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины P. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{19}}{8}$ для первой пары и $k_2 = \frac{\sqrt{19}}{2}$ для второй пары.

Пусть $AP = 8x$. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{19}$; $CP = \frac{BP}{k_2} = 2x$, $DP = \frac{AP}{k_2} = \frac{16x}{\sqrt{19}}$.

Значит, $AP : PC = 8x : 2x = 4 : 1$.

Если $AC = 10$, то $8x + 2x = 10$, $x = 1$. Следовательно, $BD = x\sqrt{19} + \frac{16x}{\sqrt{19}} = \frac{35x}{\sqrt{19}} = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 4460, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 2755. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{37}{2}$, $a = \frac{39}{2}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+19$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+19]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати чисел не превосходит $10 \cdot 19 = 190$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 19, сумма расстояний до $k+1$ и $k+18$ не превосходит 19, сумма расстояний до $k+2$ и $k+17$ также не превосходит 19 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|20a - k - (k+1) - \ldots - (k+19)| = |20a - 20k - 190|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|20a^2 - 20k - 190|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |20a^2 - 20k - 190| = 2755, \\ |20a - 20k - 190| = 4460. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - k - 9{,}5| = 137{,}75, \\ |a - k - 9{,}5| = 223. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 137{,}75, \\ a - k - 9{,}5 = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - k - 9{,}5 = 223, \\ a^2 - a + 85{,}25 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} k + 9{,}5 - a^2 = 137{,}75, \\ k + 9{,}5 - a = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 223, \\ a^2 - a - 85{,}25 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 213{,}5, \\ a = \frac{1 \pm 3\sqrt{38}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 137{,}75, \\ k + 9{,}5 - a = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 223, \\ a^2 - a - 360{,}75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 213{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a = -18{,}5, \\ a = 19{,}5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -18{,}5 \Rightarrow k = 195$; $a = 19{,}5 \Rightarrow k = 233$), следовательно, оба значения a подходят.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -18{,}5$ и $a = 19{,}5$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника AKM.

Ответ: $BC = 13$, $BK = \frac{120}{13}$, $P_{AKM} = \frac{340}{13}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 13, значит, $EK = AB = 13$; $BC = AB = 13$ (как стороны ромба). Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $MK = \sqrt{EK^2 - EM^2} = 5$. Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 5$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 12$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{5}{13}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{119}{169}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 13 \cdot \frac{120}{169} = \frac{120}{13}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 13 \cdot \frac{119}{169} = \frac{119}{13}$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $5 + 12 + \frac{119}{13} = \frac{340}{13}$.

БИЛЕТ 14

1. Даны 2414 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2414 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 29112.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 24 штуки). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_24^2 = \frac{24 \cdot 23}{2} = 276$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 24 штуки), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 276 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 14 (таких карточек $14 \cdot 25 = 350$). Для каждой из них пару можно выбрать 24 способами (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $350 \cdot 24 = 8400$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 15 до 49 (таких карточек $35 \cdot 24 = 840$). Для каждой из них пару можно выбрать 24 способами (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем $840 \cdot 24 = 20160$ вариантов.

   5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвёртого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $276 + 276 + 8400 + 20160 = 29112$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -8g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

   Ответ: $A = 8$, $A = 0$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = -8g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = -8g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = -8(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b + 4)x + b^2 + 8c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b + 4)^2 - a^2\left(b^2 + 8c\right) = 8a^2(2 + b - c)$, откуда $b - c = -2$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2\left(c^2 - Ab\right) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = 8$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^3 - \frac{99}{2x_2^2} = x_2^3 - \frac{99}{2x_1^2}.$$

   Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -6$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 12 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 3$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 3$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3 - x_2^3 - \frac{99}{2} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) - \frac{99\,(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2)}{2\,(x_1x_2)^2} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2 - 3 + \frac{99a}{18} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 11a - 6 = 0$, откуда $a = 0{,}5$ или $a = -6$. Неравенству $a^2 - 12 > 0$ удовлетворяет только $a = -6$.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{50}.

Ответ: 5699.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 5^a)\left(x - 5^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a > b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - \left(5^a + 5^b\right)x + 5^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 125^{50}, \\ 5^{a+b} \leqslant 125^{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 5^{150}, \\ a + b \leqslant 150. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 150$, $b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$a = 150 \Rightarrow 0 \text{ значений } b;$$
$$a = 149 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\});$$
$$a = 148 \Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 76 \Rightarrow 75 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 74\});$$
$$a = 75 \Rightarrow 75 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 74\});$$
$$a = 74 \Rightarrow 74 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 73\});$$
$$a = 73 \Rightarrow 73 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 72\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 1 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0);$$
$$a = 0 \Rightarrow 0 \text{ значений } b.$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \ldots 75) + (75 + 74 + 73 + \ldots + 1) = 5699$ вариантов.

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 5, $\sqrt{3}$, $\frac{5}{\sqrt{7}}$ и $5\sqrt{\frac{3}{7}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 12$.

Ответ: $AP : PC = 5$, $BD = \frac{24}{\sqrt{7}}$.

Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle PBC = \angle PAD$, $\angle PCB = \angle PDA$. Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины P. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{7}}{5}$ для первой пары и $k_2 = \sqrt{7}$ для второй пары.

Пусть $AP = 5x$. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{7}$; $CP = \frac{BP}{k_2} = x$, $DP = \frac{AP}{k_2} = \frac{5x}{\sqrt{7}}$.

Значит, $AP : PC = 5x : x = 5 : 1$.

Если $AC = 12$, то $5x + x = 12$, $x = 2$. Следовательно, $BD = x\sqrt{7} + \frac{5x}{\sqrt{7}} = \frac{12x}{\sqrt{7}} = \frac{24}{\sqrt{7}}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 360, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 345. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+19$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+19]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати чисел не превосходит $10 \cdot 19 = 190$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 19, сумма расстояний до $k+1$ и $k+18$ не превосходит 19, сумма расстояний до $k+2$ и $k+17$ также не превосходит 19 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k+19]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|20a - k - (k+1) - \ldots - (k+19)| = |20a - 20k - 190|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|20a^2 - 20k - 190|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |20a^2 - 20k - 190| = 345, \\ |20a - 20k - 190| = 360. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - k - 9{,}5| = 17{,}25, \\ |a - k - 9{,}5| = 18. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 17{,}25, \\ a - k - 9{,}5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - k - 9{,}5 = 18, \\ a^2 - a + 0{,}75 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} k + 9{,}5 - a^2 = 17{,}25, \\ k + 9{,}5 - a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 18, \\ a^2 - a - 0{,}75 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 8{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a = -0{,}5, \\ a = 1{,}5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -0{,}5 \Rightarrow k = 8$; $a = 1{,}5 \Rightarrow k = 10$), следовательно, оба значения a подходят.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 17{,}25, \\ k + 9{,}5 - a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 18, \\ a^2 - a - 35{,}25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 8{,}5, \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{142}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -0{,}5$ и $a = 1{,}5$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 4. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника AKM.

Ответ: $BC = 5$, $BK = \frac{24}{5}$, $P_{AKM} = \frac{42}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 5, значит, $EK = AB = 5$; $BC = AB = 5$ (как стороны ромба). Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $KM = \sqrt{EK^2 - EM^2} = 3$. Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 3$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 4$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 5 \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{5}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5}$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $3 + 4 + \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$.