МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

2. Решите неравенство
$$|x^3 - 2x^2 + 2| \geqslant 2 - 3x.$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60; 45)$. Найдите количество таких квадратов.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = (a^2 + b^2)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

   а) имеет ровно 3 решения;

   б) имеет ровно 2 решения.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\dfrac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

2. Решите неравенство
$$|x^3+2x^2-2| \geqslant -2-3x.$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55;40)$. Найдите количество таких квадратов.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2+4a^2b^2x=4$ является $x_1=(a^2-b^2)^2$. Найдите b^4-a^4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 5|x|+12|y|=60, \\ x^2+y^2-2y+1-a^2=0 \end{cases}$$

   а) имеет ровно 3 решения;

   б) имеет ровно 2 решения.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP=1$, $MP=3$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2-2x+1-\left|x^3-1\right|-2\left(x^2+x+1\right)^2 \geqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=12$, $P_1S_1=3$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $x^2+xy=30\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $AC=4$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 3|y|-4|x|=6, \\ x^2+y^2-14y+49-a^2=0 \end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2+2x+1-\left|x^3+1\right|-2\left(x^2-x+1\right)^2 \leqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=3$, $P_1S_1=9$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $y^2-xy=700\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leqslant a\leqslant 80$, $1\leqslant b\leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\geqslant 1, \\ x\leqslant a, \\ y\leqslant b, \end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=4$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 5|x|-12|y|=5, \\ x^2+y^2-28x+196-a^2=0 \end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.