МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$, а числа $3+\sin x$, $3+\sin y$, $3+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

   а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

   б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60;45)$. Найдите количество таких квадратов.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

   имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 3. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

   а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

   б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[10]{125}\right)^{\log^2_{\sqrt{5}} x} + 3 \geqslant x^{\log_5 x} + 3\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\log_5 x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\frac{1}{9}$, а числа $5+\cos x$, $5+\cos y$, $5+\cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

4. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{11}$, а угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной относятся как $9:25$.

   а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

   б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и радиус окружности Ω.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a + 4 \leqslant 0, \\ x^2+y^2+10x+2y-b^2-8b+10=0 \end{cases}$$

   имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\frac{100}{3\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 4. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

   а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

   б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

2. Решите неравенство

$$x^{\log_{13} x} + 7\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_{13} x} \leqslant 7 + \left(\sqrt[3]{13}\right)^{\log^2_{\sqrt{13}} x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, а числа $2+\sin x$, $2+\sin y$, $2+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 5 и 12.

   а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

   б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны BC.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(25; 60)$. Найдите количество таких квадратов.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a - y\sin a - 3 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - b^2 - 6b + 8 = 0 \end{cases}$$

   имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 75 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

   а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

   б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN перпендикулярны.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[7]{4}\right)^{\log^2_{\sqrt{2}} x} + 6 \geqslant x^{\log_2 x} + 6\left(\sqrt[7]{x}\right)^{\log_2 x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos \frac{5}{9}$, а числа $1 + \cos x$, $1 + \cos y$, $1 + \cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Радиус окружности Ω равен $5\sqrt{2}$, а расстояния от точек A и C до касательной ℓ относятся как $2 : 5$.

   а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

   б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и длину стороны AB.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(35; 65)$. Найдите количество таких квадратов.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a + 3 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 4y - b^2 + 6b + 11 = 0 \end{cases}$$

   имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 100 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

   а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

   б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN взаимно перпендикулярны.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{7}{\cos y}$, $\frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

3. Решите неравенство
$$\log_9 4 + \left(16 - \log_3^2 2\right)\log_{162} 3 \leqslant 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a, при которых существует значение параметра b такое, что система
$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB, MBC, MCD, MDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

   а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M, равна $\frac{9}{5}$.

   б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения -9, -9 и -15. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arcsin \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, а числа $\dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{4}{\sin y}$, $\dfrac{1}{\sin z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\sin^2 y$.

3. Решите неравенство
$$\log_5 250 + \left(4 - \log_5^2 2\right) \log_{50} 5 \leqslant 125^{\log_5^2 x} - 24 \cdot x^{\log_5 x}.$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 4. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Дано число $800\ldots008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a такие, что система
$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{4+y}{4}\right) = \arccos\left(x - a\right), \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y = b \end{cases}$$
имеет не более одного решения при любом значении параметра b.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $TABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 2$, $CD = DA = 3$, а каждая из плоскостей боковых граней TAB, TBC, TCD, TDA составляет угол 30° с плоскостью основания.

   а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины T, равна 2.

   б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{3}{\cos y}$, $\frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

3. Решите неравенство
$$27^{\log_3^2 x} - 8 \cdot x^{\log_3 x} \geqslant \log_{25} 4 + \left(9 - \log_5^2 2\right)\log_{250} 5.$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 5 : 2 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Дано число $500\ldots005$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 165. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a, при которых существует значение параметра b такое, что система
$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a+y}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{x+3}{3}\right), \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y = b \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $KABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 3$, $CD = DA = 4$, а каждая из плоскостей боковых граней KAB, KBC, KCD, KDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

   а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины K, равна 2.

   б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$, а числа $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{6}{\sin y}$, $\frac{1}{\sin z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\sin^2 y$.

3. Решите неравенство

$$8^{\log_2^2 x} - 2\cdot x^{\log_2 x} \geqslant \log_6 108 + \left(4-\log_6^2 3\right)\log_{108} 6.$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 2 : 1 : 3$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

5. Дано число $200\ldots002$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 66. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a такие, что система

$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{4-y}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{a+x}{2}\right), \\ x^2+y^2+2x-8y=b \end{cases}$$

   имеет не более одного решения при любом значении параметра b.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $TABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней TAB, TBC, TCD, TDA составляет угол 60° с плоскостью основания.

   а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины T, равна 2.

   б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?