

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB , 11 – на стороне BC , 12 – на стороне AC . При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50; 30)$. Найдите количество таких квадратов.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(0; 4)$ до ближайшей точки фигуры Φ .

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и $СMB$ соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырехугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x-1}-3} + \sqrt{x+9-20\sqrt{x-1}} > 5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 – на стороне AB , 9 – на стороне BC , 10 – на стороне AC . При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?
4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 25)$. Найдите количество таких квадратов.
6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \leq 3(x + y), \\ x^2 + y^2 \leq 6y - 6x - 9. \end{cases}$$

- б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(-6; 0)$ до ближайшей точки фигуры Φ .
7. В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 1$, $MP = 3$.
- а) Найдите отрезок DE .
- б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{|x| - 12}{2 - x}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 70$, $1 \leq b \leq 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C . (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).
5. Дано число $5300\dots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ , состоящую из точек $(x; y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ .

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения -9 , -9 и -15 . Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{20 - |x|}{x - 3}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 80$, $1 \leq b \leq 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C . (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).
5. Дано число $800 \dots 008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?
6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 4.

а) Найдите AC .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ , состоящую из точек $(x; y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x^2 - 6y + 9} \leq 3y - 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ .