БИЛЕТ 1

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{3}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4} + c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2 + bx + c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4} + c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 1, \\ -\frac{b^2}{4a-4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+4} = 1, \\ \frac{b^2}{4a-4} - \frac{b^2}{4a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a(a+1)} = 1, \\ \frac{b^2}{4a(a-1)} = 3. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{3}$, откуда $a = 2$. Тогда $b^2 = 24$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{24}{8} + c = -3 + c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $2x^2$, то выйдет функция $(a+2)x^2 + bx + c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+8} + c = -\frac{24}{16} + c = -\frac{3}{2} + c$, что на $\frac{3}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $x^{\log_3 x} - 2 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}$.

Ответ. $x \in \left(0; 3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right] \cup \{1\} \cup \left[3^{\sqrt{\log_3 2}}; +\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3^{\log^2_3 x} - 2 - 3^{\frac{4}{3}\log^2_3 x} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}\log^2_3 x} \leqslant 0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(3^{\log^2_3 x} - 2\right)\left(1 - 3^{\frac{1}{3}\log^2_3 x}\right) \leqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases} 3^{\log^2_3 x} - 2 \geqslant 0, \\ 1 - 3^{\frac{1}{3}\log^2_3 x} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2_3 x \geqslant \log_3 2, \\ \log^2_3 x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x \geqslant \sqrt{\log_3 2}, \\ \log_3 x \leqslant -\sqrt{\log_3 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3^{\sqrt{\log_3 2}}, \\ x \leqslant 3^{-\sqrt{\log_3 2}}; \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} 3^{\log^2_3 x} - 2 \leqslant 0, \\ 1 - 3^{\frac{1}{3}\log^2_3 x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2_3 x \leqslant \log_3 2, \\ \log^2_3 x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Объединяя результаты, получаем $x \in \left(0; 3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right] \cup \{1\} \cup \left[3^{\sqrt{\log_3 2}}; +\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)$, а числа $3 + \sin x$, $3 + \sin y$, $3 + \sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

Ответ. $-\dfrac{1}{10}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x = y - \alpha$, $z = y + \alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(3 + \sin(y - \alpha))(3 + \sin(y + \alpha)) = (3 + \sin y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(\sin(y - \alpha) + \sin(y + \alpha)) + \sin(y - \alpha)\sin(y + \alpha) = 6\sin y + \sin^2 y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\sin y\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}\cos 2y = 6\sin y + \sin^2 y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\sin y(\cos\alpha - 1) + \cos^2\alpha - \cos^2 y = \sin^2 y \Leftrightarrow 6\sin y(\cos\alpha - 1) + (\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha = 1$, либо $\sin y = -\frac{\cos\alpha + 1}{6}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, следовательно, $\sin x = \sin y = \sin z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$, то $\sin y = -\frac{1}{10}$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

© МФТИ, 2017

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

Ответ. а) 5; б) $R = \dfrac{32}{7}$; $AB = \dfrac{16}{\sqrt{7}}$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{9}{4} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{9}{16}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{7}{16}$, $R = \frac{d_A}{2\sin^2\gamma} = \frac{32}{7}$.

Следовательно, $AB = 2R\sin\gamma = \frac{16}{\sqrt{7}}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB \cdot \sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = 5.$$

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60; 45)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 2070.

Решение. Проведём через данную точку $(60; 45)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 60$ и $y = 45$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 45 способами: $(60;\ 0), (60;\ 1), \ldots, (60;\ 44)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 60$ и $y = 45$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $15 \leqslant x \leqslant 59$, $0 \leqslant y \leqslant 44$. Получаем 45^2 способов.

Общее количество способов равно $45^2 + 45 = 46 \cdot 45 = 2070$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ 4 - \sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a + y\sin a - 2 = 0$ равно 2, а точка $(0;\ 0)$ удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, содержащую точку $(0;\ 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+3)^2 + (y-1)^2 = (b-2)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-3;\ 1)$ радиуса $|b-2|$ (или точку $(-3;\ 1)$ при $b = 2$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 4$ внешним образом. Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внешним образом, сумма радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{10} - 2$, поэтому $|b-2| \geqslant \sqrt{10} - 2 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ 4 - \sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 3. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

© МФТИ, 2017

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$; б) $CD = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$ или $CD = 3\sqrt{13}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $ABCM$ и $ABDM$ равны (грань ABM общая, а вершины C и D равноудалены от плоскости ABM); кроме того $S_{ACM} = S_{ADM}$ и $S_{BCM} = S_{BDM}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, эквивалентно условию $S_{ABC} = S_{ABD}$ или равенству высот, проведённых к стороне AB в треугольниках ABC и ABD.

Пусть H и K – проекции точки D на плоскость ABC и прямую AB соответственно. Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота равна 3. Значит, площадь основания пирамиды равна $\frac{25}{\sqrt{3}}$. Тогда сторона основания $AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$, а высота треугольника ABC равна 5. Значит, DK также равно 5. Из прямоугольного треугольника DHK находим $KH = \sqrt{DK^2 - DH^2} = 4$, т.е. точка H находится на расстоянии 4 от прямой AB (H лежит на одной из двух прямых, параллельных AB, на расстоянии 4 от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре AB равен $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче CB, при этом $\frac{BH}{BC} = \frac{4}{5}$, откуда $CH = \frac{1}{5}BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ или $CH = \frac{9}{5}BC = 6\sqrt{3}$. Из треугольника CDH получаем, что $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$. Следовательно, $CD = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$ или $CD = 3\sqrt{13}$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 2

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\dfrac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

Ответ. Уменьшится на $\dfrac{27}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $4x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-4)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-16}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+\frac{27}{2},\\ -\frac{b^2}{4a-16}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{4a-16}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{a(a-4)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-4}{4(a+1)}=\frac{3}{2}$, откуда $a=-2$. Тогда $b^2=108$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{108}{-8}+c=\frac{27}{2}+c$. Если из квадратного трёхчлена $f(x)$ вычесть $2x^2$, то выйдет функция $(a-2)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a-8}+c=-\frac{108}{-16}+c=\frac{27}{4}+c$, что на $\frac{27}{4}$ меньше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\left(\sqrt[10]{125}\right)^{\log^2_{\sqrt{5}}x}+3\geqslant x^{\log_5 x}+3\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\log_5 x}$.

Ответ. $x\in\left(0;5^{-\sqrt{\log_5 3}}\right]\cup\{1\}\cup\left[5^{\sqrt{\log_5 3}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $5^{\frac{6}{5}\log_5^2 x}+3-5^{\log_5^2 x}-3\cdot 5^{\frac{1}{5}\log_5^2 x}\geqslant 0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(5^{\log_5^2 x}-3\right)\left(5^{\frac{1}{5}\log_5^2 x}-1\right)\geqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}5^{\log_5^2 x}-3\geqslant 0,\\ 5^{\frac{1}{5}\log_5^2 x}-1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5^2 x\geqslant\log_5 3,\\ \log_5^2 x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x\geqslant\sqrt{\log_5 3},\\ \log_5 x\leqslant-\sqrt{\log_5 3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 5^{\sqrt{\log_5 3}},\\ x\leqslant 5^{-\sqrt{\log_5 3}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}5^{\log_5^2 x}-3\leqslant 0,\\ 5^{\frac{1}{5}\log_5^2 x}-1\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5^2 x\leqslant\log_5 3,\\ \log_5^2 x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_5 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;5^{-\sqrt{\log_5 3}}\right]\cup\{1\}\cup\left[5^{\sqrt{\log_5 3}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\dfrac{1}{9}$, а числа $5+\cos x$, $5+\cos y$, $5+\cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

Ответ. $-\dfrac{1}{9}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(5+\cos(y-\alpha))(5+\cos(y+\alpha))=(5+\cos y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5(\cos(y-\alpha)+\cos(y+\alpha))+\cos(y-\alpha)\cos(y+\alpha)=10\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10\cos y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2y=10\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10\cos y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha+\cos^2 y-1=\cos^2 y\Leftrightarrow 10\cos y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\cos y=-\frac{\cos\alpha+1}{10}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\cos x=\cos y=\cos z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=\frac{1}{9}$, то $\cos y=-\frac{1}{9}$.

4. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{11}$, а угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной относятся как $9:25$.

а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и радиус окружности Ω.

Ответ. а) $9:16$, б) $d_C = \dfrac{275}{54}$, $R=3$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{25}{9} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{25}{36}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{11}{36}$, $R = \frac{AB}{\sin 2\gamma} = 3$. Тогда $d_A = \frac{11}{6}$, $d_C = \frac{275}{54}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB\cdot\sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = \tfrac{88}{27}.$$

Отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC равно $\frac{11}{6} : \frac{88}{27} = \frac{9}{16}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55;40)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1560.

Решение. Проведём через данную точку $(55;40)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x=55$ и $y=40$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 39 способами: $(55;\ 1), (55;\ 1), \ldots, (55;\ 39)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x=55$ и $y=40$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $16 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 39$. Получаем 39^2 способов.

Общее количество способов равно $39^2 + 39 = 39\cdot 40 = 1560$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a + 4 \leqslant 0, \\ x^2+y^2+10x+2y-b^2-8b+10=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ -8-\sqrt{26}\right] \cup \left[\sqrt{26};\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a + y\sin a + 4 = 0$ равно 3, а точка $(0;\ 0)$ не удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, не содержащую точку $(0;\ 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2+y^2=16$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+5)^2+(y+1)^2 = (b+4)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-5;\ -1)$ радиуса $|b+4|$ (или точку $(-5;\ -1)$ при $b=-4$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2+y^2=16$ внутренним образом (т.е. окружность $x^2+y^2=16$ находится внутри окружности $\Omega(b)$). Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0;+\infty)$.

Для окружностей, касающихся внутренним образом, разность радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{26}+4$, поэтому $|b+4| \geqslant \sqrt{26}+4 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ -8-\sqrt{26}\right] \cup \left[\sqrt{26};\ +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\dfrac{100}{3\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 4. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

© МФТИ, 2017

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)$; б) $CD = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ или $CD = \dfrac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $ABCM$ и $ABDM$ равны (грань ABM общая, а вершины C и D равноудалены от плоскости ABM); кроме того $S_{ACM} = S_{ADM}$ и $S_{BCM} = S_{BDM}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, эквивалентно условию $S_{ABC} = S_{ABD}$ или равенству высот, проведённых к стороне AB в треугольниках ABC и ABD.

Пусть H и K – проекции точки D на плоскость ABC и прямую AB соответственно. Объём пирамиды равен $\frac{100}{\sqrt{3}}$, а её высота равна 4. Значит, площадь основания пирамиды равна $\frac{25}{\sqrt{3}}$. Тогда сторона основания $AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$, а высота треугольника ABC равна 5. Значит, DK также равно 5. Из прямоугольного треугольника DHK находим $KH = \sqrt{DK^2 - DH^2} = 3$, т.е. точка H находится на расстоянии 3 от прямой AB (H лежит на одной из двух прямых, параллельных AB, на расстоянии 3 от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре AB равен $\arccos\left(\pm\frac{3}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче CB, при этом $\frac{BH}{BC} = \frac{3}{5}$, откуда $CH = \frac{2}{5}BC = \frac{4}{\sqrt{3}}$ или $CH = \frac{8}{5}BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Из треугольника CDH получаем, что $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$. Следовательно, $CD = \frac{8}{\sqrt{3}}$ или $CD = \frac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 3

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $3x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+3)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+12}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+9,\\ -\frac{b^2}{4a-4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+12}=9,\\ \frac{b^2}{4a-4}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3b^2}{4a(a+3)}=9,\\ \frac{b^2}{4a(a-1)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{3(a-1)}{a+3}=1$, откуда $a=3$. Тогда $b^2=216$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{216}{12}+c=-18+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить x^2, то выйдет функция $(a+1)x^2+bx+c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{216}{16}+c=-\frac{27}{2}+c$, что на $\frac{9}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $x^{\log_{13}x}+7\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_{13}x}\leqslant 7+\left(\sqrt[3]{13}\right)^{\log^2_{\sqrt{13}}x}$.

Ответ. $x\in\left(0;13^{-\sqrt{\log_{13}7}}\right]\cup\{1\}\cup\left[13^{\sqrt{\log_{13}7}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $13^{\log^2_{13}x}+7\cdot 13^{\frac{1}{3}\log^2_{13}x}-7-13^{\frac{4}{3}\log^2_{13}x}\leqslant 0$. Сгруппировав первый член с четвёртым, а второй – с третьим, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(13^{\log^2_{13}x}-7\right)\left(1-13^{\frac{1}{3}\log^2_{13}x}\right)\leqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}13^{\log^2_{13}x}-7\geqslant 0,\\ 1-13^{\frac{1}{3}\log^2_{13}x}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_{13}x\geqslant\log_{13}7,\\ \log^2_{13}x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{13}x\geqslant\sqrt{\log_{13}7},\\ \log_{13}x\leqslant-\sqrt{\log_{13}7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 13^{\sqrt{\log_{13}7}},\\ x\leqslant 13^{-\sqrt{\log_{13}7}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}13^{\log^2_{13}x}-7\leqslant 0,\\ 1-13^{\frac{1}{3}\log^2_{13}x}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_{13}x\leqslant\log_{13}7,\\ \log^2_{13}x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_{13}x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;13^{-\sqrt{\log_{13}7}}\right]\cup\{1\}\cup\left[13^{\sqrt{\log_{13}7}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right)$, а числа $2+\sin x$, $2+\sin y$, $2+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

Ответ. $-\dfrac{1}{5}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(2+\sin(y-\alpha))(2+\sin(y+\alpha))=(2+\sin y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\sin(y-\alpha)+\sin(y+\alpha))+\sin(y-\alpha)\sin(y+\alpha)=4\sin y+\sin^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha-\tfrac{1}{2}\cos 2y=4\sin y+\sin^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha-\cos^2 y=\sin^2 y\Leftrightarrow 4\sin y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\sin y=-\frac{\cos\alpha+1}{4}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\sin x=\sin y=\sin z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$, то $\sin y=-\frac{1}{5}$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 5 и 12.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны BC.

Ответ. а) 7; б) $R = \dfrac{25}{4}$; $BC = 5\sqrt{6}$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{12}{5} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{3}{5}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{2}{5}$, $R = \frac{d_A}{2\sin^2\gamma} = \frac{25}{4}$.

Следовательно, $AB = 2R\sin\gamma = \frac{16}{\sqrt{7}}$, $BC = 4R\sin\gamma\cos\gamma = 5\sqrt{6}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно
$$AB \cdot \sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = 7.$$

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(25; 60)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 650.

Решение. Проведём через данную точку $(25; 60)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 25$ и $y = 60$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "левая" вершина квадрата может быть расположена 25 способами: $(0; 60), (1; 60), \ldots, (24; 60)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 25$ и $y = 60$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $0 \leqslant x \leqslant 24$, $35 \leqslant y \leqslant 59$. Получаем 25^2 способов.

Общее количество способов равно $25^2 + 25 = 26 \cdot 25 = 650$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система
$$\begin{cases} x\cos a - y\sin a - 3 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - b^2 - 6b + 8 = 0 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ -\sqrt{17}\right] \cup \left[\sqrt{17} - 6;\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a - y\sin a - 3 = 0$ равно 3, а точка $(0;\ 0)$ удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, содержащую точку $(0;\ 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x-4)^2 + (y+1)^2 = (b+3)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(4;\ -1)$ радиуса $|b+3|$ (или точку $(4;\ -1)$ при $b = -3$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 9$ внешним образом. Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внешним образом, сумма радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{17} - 3$, поэтому $|b+3| \geqslant \sqrt{17} - 3 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ -\sqrt{17}\right] \cup \left[\sqrt{17} - 6;\ +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 75 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$; б) $MN = \sqrt{31}$ или $MN = 3\sqrt{39}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $KLMT$ и $KLNT$ равны (грань KLT общая, а вершины M и N равноудалены от плоскости KLT); кроме того $S_{KMT} = S_{KNT}$ и $S_{LMT} = S_{LNT}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, эквивалентно условию $S_{KLM} = S_{KLN}$ или равенству высот, проведённых к стороне KL в треугольниках KLM и KLN.

Пусть H и Q – проекции точки N на плоскость KLM и прямую KL соответственно. Объём пирамиды равен 75, а площадь её основания равна $\frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$. Значит, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Высота треугольника KLM равна $5\sqrt{3}$. Следовательно, NQ также равно $5\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника NQH находим $QH = \sqrt{QN^2 - NH^2} = 4\sqrt{3}$, т.е. точка H находится на расстоянии $4\sqrt{3}$ от прямой KL (H лежит на одной из двух прямых, параллельных KL, на расстоянии $4\sqrt{3}$ от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре KL равен $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче ML, при этом $\frac{LH}{LM} = \frac{4}{5}$, откуда $MH = \frac{1}{5}LM = 2$ или $MH = \frac{9}{5}LM = 18$. Из треугольника MNH получаем, что $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2}$. Следовательно, $MN = \sqrt{31}$ или $MN = 3\sqrt{39}$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 4

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\dfrac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{45}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $2x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+2)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+8}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $5x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-5)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-20}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+8}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+10,\\ -\frac{b^2}{4a-20}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-\frac{15}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+8}=10,\\ \frac{b^2}{4a-20}-\frac{b^2}{4a}=\frac{15}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2b^2}{4a(a+2)}=10,\\ \frac{5b^2}{4a(a-5)}=\frac{15}{2}.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{2(a-5)}{5(a+2)}=\frac{20}{15}$, откуда $a=-5$. Тогда $b^2=300$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{300}{-20}+c=15+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $3x^2$, то выйдет функция $(a+3)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c=-\frac{300}{-8}+c=\frac{75}{2}+c$, что на $\frac{45}{2}$ больше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\left(\sqrt[7]{4}\right)^{\log^2_{\sqrt{2}}x}+6\geqslant x^{\log_2 x}+6\left(\sqrt[7]{x}\right)^{\log_2 x}$.

Ответ. $x\in\left(0;2^{-\sqrt{\log_2 6}}\right]\cup\{1\}\cup\left[2^{\sqrt{\log_2 6}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $2^{\frac{8}{7}\log_2^2 x}+6-2^{\log_2^2 x}-6\cdot 2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}\geqslant 0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(2^{\log_2^2 x}-6\right)\left(2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\right)\geqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}2^{\log_2^2 x}-6\geqslant 0,\\ 2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2^2 x\geqslant\log_2 6,\\ \log_2^2 x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\geqslant\sqrt{\log_2 6},\\ \log_2 x\leqslant-\sqrt{\log_2 6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2^{\sqrt{\log_2 6}},\\ x\leqslant 2^{-\sqrt{\log_2 6}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}2^{\log_2^2 x}-6\leqslant 0,\\ 2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2^2 x\leqslant\log_2 6,\\ \log_2^2 x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;2^{-\sqrt{\log_2 6}}\right]\cup\{1\}\cup\left[2^{\sqrt{\log_2 6}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\dfrac{5}{9}$, а числа $1+\cos x$, $1+\cos y$, $1+\cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

Ответ. $-\dfrac{7}{9}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(1+\cos(y-\alpha))(1+\cos(y+\alpha))=(1+\cos y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos(y-\alpha)+\cos(y+\alpha)+\cos(y-\alpha)\cos(y+\alpha)=2\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2y=2\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha+\cos^2 y-1=\cos^2 y\Leftrightarrow 2\cos y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\cos y=-\frac{\cos\alpha+1}{2}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\cos x=\cos y=\cos z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=\frac{5}{9}$, то $\cos y=-\frac{7}{9}$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Радиус окружности Ω равен $5\sqrt{2}$, а расстояния от точек A и C до касательной ℓ относятся как $2:5$.

а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и длину стороны AB.

Ответ. а) $2:3$; б) $AB = 5\sqrt{3}$, $d_C = \dfrac{75}{4\sqrt{2}}$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{5}{2} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{5}{8}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{3}{8}$, $d_A = \frac{15}{2\sqrt{2}}$, $d_C = \frac{75}{4\sqrt{2}}$.

$AB = 2R\sin\gamma = 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 5\sqrt{3}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB\cdot\sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = \tfrac{45}{4\sqrt{2}}.$$

Отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC равно $\frac{15}{2\sqrt{2}} : \frac{45}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(35; 65)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1190.

Решение. Проведём через данную точку $(35; 65)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 35$ и $y = 65$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “левая” вершина квадрата может быть расположена 34 способами: $(1;\,65), (2;\,65), \dots (34;\,65)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 35$ и $y = 65$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $1 \leqslant x \leqslant 34$, $31 \leqslant y \leqslant 64$. Получаем 34^2 способов.

Общее количество способов равно $34^2 + 34 = 34\cdot 35 = 1190$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a + 3 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 4y - b^2 + 6b + 11 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ -2\sqrt{5}\,\right] \cup \left[6 + 2\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a + y\sin a + 3 = 0$ равно 3, а точка $(0;\,0)$ не удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, не содержащую точку $(0;\,0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+4)^2 + (y-2)^2 = (b-3)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-4;\,2)$ радиуса $|b-3|$ (или точку $(-4;\,2)$ при $b = 3$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 9$ внутренним образом (т.е. окружность $x^2 + y^2 = 9$ находится внутри окружности $\Omega(b)$). Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внутренним образом, разность радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{20} + 3$, поэтому $|b-3| \geqslant \sqrt{20} + 3 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ -2\sqrt{5}\,\right] \cup \left[6 + 2\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

© МФТИ, 2017

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 100 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN взаимно перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)$; б) $CD = 8$ или $CD = 4\sqrt{19}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $KLMT$ и $KLNT$ равны (грань KLT общая, а вершины M и N равноудалены от плоскости KLT); кроме того $S_{KMT} = S_{KNT}$ и $S_{LMT} = S_{LNT}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, эквивалентно условию $S_{KLM} = S_{KLN}$ или равенству высот, проведённых к стороне KL в треугольниках KLM и KLN.

Пусть H и Q – проекции точки N на плоскость KLM и прямую KL соответственно. Объём пирамиды равен 100, а площадь её основания равна $\frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$. Значит, высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Высота треугольника KLM равна $5\sqrt{3}$. Следовательно, NQ также равно $5\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника NQH находим $QH = \sqrt{QN^2 - NH^2} = 3\sqrt{3}$, т.е. точка H находится на расстоянии $3\sqrt{3}$ от прямой KL (H лежит на одной из двух прямых, параллельных KL, на расстоянии $3\sqrt{3}$ от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре KL равен $\arccos\left(\pm\frac{3}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче ML, при этом $\frac{LH}{LM} = \frac{3}{5}$, откуда $MH = \frac{2}{5}LM = 4$ или $MH = \frac{8}{5}LM = 16$. Из треугольника MNH получаем, что $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2}$. Следовательно, $MN = 8$ или $MN = 4\sqrt{19}$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 9

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $\frac{39}{8}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x - n - 1{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 5$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 5$, откуда $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{39}{8}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{7}{\cos y}$, $\frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

Ответ. $\frac{10}{13}$.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем $y = \frac{x+z}{2}$, $\frac{14}{\cos y} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos z}$. Преобразуем второе равенство:

$$\frac{14}{\cos y} = \frac{\cos x + \cos z}{\cos x \cos z} \Leftrightarrow \frac{14}{\cos y} = \frac{2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}}{0{,}5\,(\cos(x+z) + \cos(x-z))}.$$

Подставляя сюда, что $x + z = 2y$, $x - z = -2\alpha$, получаем $\frac{7}{\cos y} = \frac{2\cos y\cos\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2y}$. Это равенство на ОДЗ равносильно следующему:

$$14\cos^2\alpha - 7 + 14\cos^2 y - 7 = 2\cos^2 y\cos\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2 y(7 - \cos\alpha) = 14 - 14\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{7 - 7\cos^2\alpha}{7 - \cos\alpha}.$$

Так как $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, то окончательно получаем $\cos^2 y = \frac{10}{13}$.

3. Решите неравенство $\log_9 4 + \left(16 - \log_3^2 2\right)\log_{162} 3 \leqslant 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}$.

Ответ. $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\log_9 4 + \left(16 - \log_3^2 2\right)\log_{162} 3 = \log_3 2 + \frac{(4 - \log_3 2)(4 + \log_3 2)}{\log_3 162} = \log_3 2 + \frac{(4 - \log_3 2)(4 + \log_3 2)}{4 + \log_3 2} = 4.$$

Обозначим $4^{\log_4^2 x} = v$. Тогда $x^{\log_4 x} = \left(4^{\log_4 x}\right)^{\log_4 x} = v$ и неравенство принимает вид $v^3 - 15v - 4 \geqslant 0$.

Одним из корней многочлена в левой части является $v = 4$. Выделив множитель $v - 4$, получаем $(v - 4)\left(v^2 + 4v + 1\right) \geqslant 0$, откуда $v \geqslant 4$ (так как $v > 0$, то второй множитель положителен). Находим x:

$$4^{\log_4^2 x} \geqslant 4 \Leftrightarrow \log_4^2 x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_4 x \geqslant 1,\\ \log_4 x \leqslant -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty).$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 14$; б) $\angle DAC = 45°$, $S_{ABCD} = 97$.

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$,

 © МФТИ, 2017

$\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 14$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90°$, то $\angle DAC = 45°$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5AC \cdot DT = 49$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 6$, $AM = AK = 8$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $196 = (x+8)^2+(x+6)^2$, $x^2+14x-48 = 0$, $x = \sqrt{97} - 7$. Тогда $AB = \sqrt{97} + 1$, $BC = \sqrt{97} - 1$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5AB \cdot BC = 48$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $49 + 48 = 97$.

5. Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 22100.

Решение. $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 5 выполнена в любом случае, так как число оканчивается пятёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1; 9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16 + 11 = 27$). Подходят следующие пары цифр: $2 - -9$, $3 - -8$, $4 - -7$, $5 - -6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (100 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бóльшую цифру (49 способов) – итого выходит $4 \cdot 100 \cdot 49 = 19600$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 9 надо, чтобы $16+2k \vdots 9$. Этому условию удовлетворяет только $k = 1$. Такая замена может быть осуществлена $50 \cdot 50 = 2500$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $19600 + 2500 = 22100$ способов.

6. Найдите все значения параметра a, при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\dfrac{4-x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ. $a \in \left(-\dfrac{13}{3}; \dfrac{37}{3}\right)$.

Решение. Первое уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $\frac{a-y}{3} = \frac{4-x}{4}$, $y = \frac{3x}{4} - 3 + a$. ОДЗ определяется неравенством $-1 \leqslant \frac{4-x}{4} \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 8$. Итак, первое уравнение задаёт отрезок AB на плоскости, расположение которого зависит от параметра a.

Второе уравнение может быть переписано в виде $(x-4)^2 + (y-4)^2 = b + 32$ – это уравнение окружности с центром $M(4; 4)$ радиуса $\sqrt{b+32}$ (также может быть точка или пустое множество, но нас эти варианты не интересуют, так как тогда у системы меньше двух решений).

Система может иметь два решения при каком-либо b тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный из M на прямую, содержащую отрезок AB, попадает во внутреннюю точку отрезка (если окружность пересекает прямую, то точки пересечения находятся по разные стороны от проекции центра окружности на прямую).

Составим уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной AB. Поскольку произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то её угловой коэффициент равен $-\frac{4}{3}$ и её уравнение имеет вид $y - 4 = -\frac{4}{3}(x-4)$, т.е. $y = -\frac{4}{3}x + \frac{28}{3}$. Абсцисса точки пересечения этой прямой и прямой AB может быть найдена из системы уравнений $y = -\frac{4}{3}x + \frac{28}{3}$, $y = \frac{3x}{4} - 3 + a$ – это $x_0 = \frac{148-12a}{25}$.

 © МФТИ, 2017

Чтобы эта точка оказалась внутренней точкой отрезка, необходимо и достаточно, чтобы $0 < x_0 < 8$, откуда $-\frac{13}{3} < a < \frac{37}{3}$.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB, MBC, MCD, MDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M, равна $\dfrac{9}{5}$.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

Ответ. а) $\dfrac{27}{25}$; б) $\dfrac{4}{3}$.

Пусть MH – высота пирамиды, $(MH = h)$, P – проекция M на прямую AB. Тогда MHP – прямоугольный треугольник с углом $\angle MPH = 45^\circ$, откуда $HP = h \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = h$. Аналогично доказывается, что точка H удалена от каждой из прямых BC, CD, DA на расстояние $r = h$ (иначе говоря, окружность радиуса r с центром H касается прямых AB, BC, CD, DA).

Треугольники BAD и BCD равны по трем сторонам, поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали BD. Его площадь S равна $2S_{BAD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD$, поэтому $S \leqslant AB \cdot AD = 2$. Равенство достигается, когда $\angle BAD = 90^\circ$, поэтому $S_{\max} = 2$.

Точка H лежит на внутренней или внешней биссектрисе каждого из углов четырехугольника $ABCD$. BD является внутренней биссектрисой углов B и D. Внешние биссектрисы углов B и D параллельны, поэтому H обязана лежать на BD. Обозначим через I и J точки пересечения внутренней и внешней биссектрис угла A с прямой BD. Тогда I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$ (пусть ее радиус равен r_1); J – центр окружности, касающейся продолжений сторон четырехугольника $ABCD$ (вневписанной окружности, пусть ее радиус равен r_2). Площадь четырёхугольника, в который вписана окружность может быть задана формулой $S = \frac{(AB+BC+CD+DA)r_1}{2}$, откуда $r_1 = \frac{S}{3}$. Также $S = S_{ADJ} + S_{CDJ} - S_{ABJ} - S_{BCJ} = \frac{(AD+CD-AB-BC)r_2}{2}$, откуда $r_2 = S$.

Пирамида удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда (1) высота проходит через центр вписанной в основание окружности (т.е. $H = I$) и при этом её длина равна $h = r_1 = \frac{S}{3}$ или (2) высота проходит через центр вневписанной окружности (т.е. $H = J$) и $h = r_2 = S$.

а) При $h = \frac{9}{5}$ первый случай невозможен ($S = 3r_1 = 3h = \frac{27}{5} > 2$). Поэтому остаётся второй случай, и тогда $S = r_2 = h = \frac{9}{5}$. Объём равен $V = \frac{Sh}{3} = \frac{27}{25}$.

б) Объём в первом и во втором случае равен $V_1 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{9}$ и $V_2 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{3}$. Наибольший объём $V_{\max} = \frac{S^2_{\max}}{3} = \frac{4}{3}$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 10

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения -9, -9 и -15. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $-\dfrac{33}{4}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x - n - 0{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = -9$, $f(n+2) = -15$, то получаем $\frac{a}{4} + c = -9$, $\frac{9a}{4} + c = -15$, откуда $a = -3$, $c = -\frac{33}{4}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наибольшее значение функции.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, а числа $\dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{4}{\sin y}$, $\dfrac{1}{\sin z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\sin^2 y$.

Ответ. $\dfrac{7}{13}$.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем $y = \frac{x+z}{2}$, $\frac{8}{\sin y} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin z}$. Преобразуем второе равенство:

$$\frac{8}{\sin y} = \frac{\sin x + \sin z}{\sin x \sin z} \Leftrightarrow \frac{8}{\sin y} = \frac{2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}}{0{,}5\left(\cos(x-z) - \cos(x+z)\right)}.$$

Подставляя сюда, что $x + z = 2y$, $x - z = -2\alpha$, получаем $\dfrac{2}{\sin y} = \dfrac{\sin y \cos\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2y}$. Это равенство на ОДЗ равносильно следующему:

$$2 - 4\sin^2\alpha - 2 + 4\sin^2 y = \sin^2 y\cos\alpha \Leftrightarrow (4 - \cos\alpha)\sin^2 y = 4\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2 y = \frac{4\sin^2\alpha}{4 - \cos\alpha}.$$

Так как $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, и окончательно получаем $\sin^2 y = \frac{7}{13}$.

3. Решите неравенство $\log_5 250 + \left(4 - \log_5^2 2\right)\log_{50} 5 \leqslant 125^{\log_5^2 x} - 24\cdot x^{\log_5 x}$.

Ответ. $x \in \left(0; \dfrac{1}{5}\right] \cup [5; +\infty)$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\log_5 250 + \left(4 - \log_5^2 2\right)\log_{50} 5 = 3 + \log_5 2 + \frac{(2 - \log_5 2)(2 + \log_5 2)}{\log_5 50} = 3 + \log_5 2 + \frac{(2 - \log_5 2)(2 + \log_5 2)}{2 + \log_5 2} = 5.$$

Обозначим $5^{\log_5^2 x} = v$. Тогда $x^{\log_5 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = v$ и неравенство принимает вид $5 \leqslant v^3 - 24v \Leftrightarrow v^3 - 24v - 5 \geqslant 0$.

Одним из корней многочлена в левой части является $v = 5$. Выделив множитель $v - 5$, получаем $(v - 5)\left(v^2 + 5v + 1\right) \geqslant 0$, откуда $v \geqslant 5$ (так как $v > 0$, то второй множитель положителен). Находим x:

$$5^{\log_5^2 x} \geqslant 5 \Leftrightarrow \log_5^2 x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x \geqslant 1,\\ \log_5 x \leqslant -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{5}\right] \cup [5; +\infty).$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 4. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 8$; б) $\angle DAC = 45^\circ$, $S_{ABCD} = 31$.

© МФТИ, 2017

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 8$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90°$, то $\angle DAC = 45°$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5AC \cdot DT = 16$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 3$, $AM = AK = 5$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $64 = (x+5)^2 + (x+3)^2$, $x^2 + 8x - 15 = 0$, $x = \sqrt{31} - 4$. Тогда $AB = \sqrt{31} + 1$, $BC = \sqrt{31} - 1$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5AB \cdot BC = 15$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $16 + 15 = 31$.

5. Дано число $800\ldots008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 14080.

Решение. $198 = 2 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 2 выполнена в любом случае, так как число оканчивается восьмёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1; 9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16 + 11 = 27$). Подходят следующие пары цифр: $2 - -9$, $3 - -8$, $4 - -7$, $5 - -6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (80 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бóльшую цифру (39 способов) – итого выходит $4 \cdot 80 \cdot 39 = 12480$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 9 надо, чтобы $16 + 2k \,\vdots\, 9$. Этому условию удовлетворяет только $k = 1$. Такая замена может быть осуществлена $40 \cdot 40 = 1600$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $12480 + 1600 = 14080$ способов.

6. Найдите все значения параметра a такие, что система

$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{4+y}{4}\right) = \arccos(x-a), \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y = b \end{cases}$$

имеет не более одного решения при любом значении параметра b.

Ответ. $a \in (-\infty; -15] \cup [19; +\infty)$.

Решение. Первое уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $\frac{4+y}{4} = x - a$, $y = 4x - 4a - 4$. ОДЗ определяется неравенством $-1 \leqslant \frac{4+y}{4} \leqslant 1$, $-8 \leqslant y \leqslant 0$. Итак, первое уравнение задаёт отрезок AB на плоскости, расположение которого зависит от параметра a.

Второе уравнение может быть переписано в виде $(x-2)^2 + (y+4)^2 = b + 20$ – это уравнение окружности с центром $M(2; -4)$ радиуса $\sqrt{b+20}$ (также может быть точка или пустое множество, но тогда при любом a не более одного решения).

Система имеет не более одного решения при любом b тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный из M на прямую, содержащую отрезок AB, не попадает во внутреннюю точку отрезка (если окружность пересекает прямую, то точки пересечения находятся по разные стороны от проекции центра окружности на прямую).

Составим уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной AB. Поскольку произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то её угловой коэффициент равен $-\frac{1}{4}$ и её уравнение имеет вид $y + 4 = -\frac{1}{4}(x-2)$, т.е. $y = -\frac{x}{4} - \frac{7}{2}$. Ордината точки пересечения этой прямой и прямой AB может быть найдена из системы уравнений $y = -\frac{x}{4} - \frac{7}{2}$, $y = 4x - 4a - 4$ – это $y_0 = -\frac{4a+60}{17}$. Чтобы

© МФТИ, 2017

эта точка не оказалась внутренней точкой отрезка, необходимо и достаточно, чтобы $y_0 \notin (-8; 0)$, откуда $a \leqslant -15$ или $a \geqslant 19$.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $TABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 2$, $CD = DA = 3$, а каждая из плоскостей боковых граней TAB, TBC, TCD, TDA составляет угол 30° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины T, равна 2.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

Ответ. а) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; б) $4\sqrt{3}$.

Пусть TH – высота пирамиды, ($TH = h$), P – проекция T на прямую AB. Тогда THP – прямоугольный треугольник с углом $\angle TPH = 30^\circ$, откуда $HP = h \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = h\sqrt{3}$. Аналогично доказывается, что точка H удалена от каждой из прямых BC, CD, DA на расстояние $r = h\sqrt{3}$ (иначе говоря, окружность радиуса r с центром H касается прямых AB, BC, CD, DA).

Треугольники BAD и BCD равны по трем сторонам, поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали BD. Его площадь S равна $2S_{BAD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD$, поэтому $S \leqslant AB \cdot AD = 6$. Равенство достигается, когда $\angle BAD = 90^\circ$, поэтому $S_{\max} = 6$.

Точка H лежит на внутренней или внешней биссектрисе каждого из углов четырехугольника $ABCD$. BD является внутренней биссектрисой углов B и D. Внешние биссектрисы углов B и D параллельны, поэтому H обязана лежать на BD. Обозначим через I и J точки пересечения внутренней и внешней биссектрис угла A с прямой BD. Тогда I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$ (пусть её радиус равен r_1); J – центр окружности, касающейся продолжений сторон четырехугольника $ABCD$ (вневписанной окружности, пусть её радиус равен r_2). Площадь четырёхугольника, в который вписана окружность может быть задана формулой $S = \frac{(AB+BC+CD+DA)r_1}{2}$, откуда $r_1 = \frac{S}{5}$. Также $S = S_{ADJ} + S_{CDJ} - S_{ABJ} - S_{BCJ} = \frac{(AD+CD-AB-BC)r_2}{2}$, откуда $r_2 = S$.

Пирамида удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда (1) высота проходит через центр вписанной в основание окружности (т.е. $H = I$) и при этом её длина равна $h = r_1 = \frac{S}{5}$ или (2) высота проходит через центр вневписанной окружности (т.е. $H = J$) и $h = r_2 = S$.

а) При $h = 2$ первый случай невозможен ($S = 5r_1 = 5h\sqrt{3} = 10\sqrt{3} > 6$). Поэтому остаётся второй случай, и тогда $S = r_2 = h\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Объём равен $V = \frac{Sh}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

б) Объём в первом и во втором случае равен $V_1 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{15\sqrt{3}}$ и $V_2 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{3\sqrt{3}}$. Наибольший объём $V_{\max} = \frac{S^2_{\max}}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

 © МФТИ, 2017

БИЛЕТ 11

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $\frac{41}{4}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x-n-0{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = 13$, $f(n+2) = 35$, то получаем $\frac{a}{4} + c = 13$, $\frac{9a}{4} + c = 35$, откуда $a = 11$, $c = \frac{41}{4}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{3}{\cos y}$, $\frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем $y = \frac{x+z}{2}$, $\frac{14}{\cos y} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos z}$. Преобразуем второе равенство:

$$\frac{6}{\cos y} = \frac{\cos x + \cos z}{\cos x \cos z} \Leftrightarrow \frac{6}{\cos y} = \frac{2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}}{0{,}5\left(\cos(x+z) + \cos(x-z)\right)}.$$

Подставляя сюда, что $x + z = 2y$, $x - z = -2\alpha$, получаем $\frac{3}{\cos y} = \frac{2\cos y \cos\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2y}$. Это равенство на ОДЗ равносильно следующему:

$$6\cos^2\alpha - 3 + 6\cos^2 y - 3 = 2\cos^2 y \cos\alpha \Leftrightarrow 2(3-\cos\alpha)\cos^2 y = 6 - 6\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{3-3\cos^2\alpha}{3-\cos\alpha}.$$

Так как $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, то окончательно получаем $\cos^2 y = \frac{4}{5}$.

3. Решите неравенство $27^{\log_3^2 x} - 8\cdot x^{\log_3 x} \geqslant \log_{25} 4 + \left(9 - \log_5^2 2\right)\log_{250} 5$.

Ответ. $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \bigcup [3; +\infty)$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства:

$$\log_{25} 4 + \left(9-\log_5^2 2\right)\log_{250} 5 = \log_5 2 + \frac{(3-\log_5 2)(3+\log_5 2)}{\log_5 250} = \log_5 2 + \frac{(3-\log_5 2)(3+\log_5 2)}{3+\log_5 2} = 3.$$

Обозначим $3^{\log_3^2 x} = v$. Тогда $x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = v$ и неравенство принимает вид $v^3 - 8v - 3 \geqslant 0$.

Одним из корней многочлена в левой части является $v = 3$. Выделив множитель $v - 3$, получаем $(v-3)\left(v^2+3v+1\right) \geqslant 0$, откуда $v \geqslant 3$ (так как $v > 0$, то второй множитель положителен). Находим x:

$$3^{\log_3^2 x} \geqslant 3 \Leftrightarrow \log_3^2 x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x \geqslant 1,\\ \log_3 x \leqslant -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty).$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 5 : 2 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 14$; б) $\angle DAC = 45°$, $S_{ABCD} = 94$.

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$,

 © МФТИ, 2017

$\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 14$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90°$, то $\angle DAC = 45°$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5AC \cdot DT = 49$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 5$, $AM = AK = 9$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $196 = (x+5)^2 + (x+9)^2$, $x^2 + 14x - 45 = 0$, $x = \sqrt{94} - 7$. Тогда $AB = \sqrt{94} + 2$, $BC = \sqrt{94} - 2$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5AB \cdot BC = 45$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $49 + 45 = 94$.

5. Дано число $500\ldots005$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 165. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 17280.

Решение. $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Делимость на 5 выполнена в любом случае, так как число оканчивается пятёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1; 9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 3 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $10 + 11 = 21$). Подходят следующие пары цифр: $2 - -9$, $3 - -8$, $4 - -7$, $5 - -6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (80 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бо́льшую цифру (39 способов) – итого выходит $4 \cdot 80 \cdot 39 = 12480$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 3 надо, чтобы $10 + 2k \,\vdots\, 3$. Этому условию удовлетворяют $k = 1$, $k = 4$ и $k = 7$. Такая замена может быть осуществлена $3 \cdot 40 \cdot 40 = 4800$ способами (выбираем одну из трёх цифр, а затем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $12480 + 4800 = 17280$ способов.

6. Найдите все значения параметра a, при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{a+y}{2}\right) = \arcsin\left(\dfrac{x+3}{3}\right), \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ. $a \in \left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{19}{2}\right)$.

Решение. Первое уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $\frac{a+y}{2} = \frac{x+3}{3}$, $y = \frac{2x}{3} + 2 - a$. ОДЗ определяется неравенством $-1 \leqslant \frac{x+3}{3} \leqslant 1$, $-6 \leqslant x \leqslant 0$. Итак, первое уравнение задаёт отрезок AB на плоскости, расположение которого зависит от параметра a.

Второе уравнение может быть переписано в виде $(x+3)^2 + (y+3)^2 = b + 18$ – это уравнение окружности с центром $M(-3; -3)$ радиуса $\sqrt{b+18}$ (также может быть точка или пустое множество, но нас эти варианты не интересуют, так как тогда у системы меньше двух решений).

Система может иметь два решения при каком-либо b тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный из M на прямую, содержащую отрезок AB, попадает во внутреннюю точку отрезка (если окружность пересекает прямую, то точки пересечения находятся по разные стороны от проекции центра окружности на прямую).

Составим уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной AB. Поскольку произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то её угловой коэффициент равен $-\frac{3}{2}$ и её уравнение имеет вид $y + 3 = -\frac{3}{2}(x+3)$, т.е. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$. Абсцисса точки пересечения этой прямой

 © МФТИ, 2017

и прямой AB может быть найдена из системы уравнений $y = -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$, $y = \frac{2x}{3} + 2 - a$ – это $x_0 = \frac{6a-57}{13}$. Чтобы эта точка оказалась внутренней точкой отрезка, необходимо и достаточно, чтобы $-6 < x_0 < 0$, откуда $-\frac{7}{2} < a < \frac{19}{2}$.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $KABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 3$, $CD = DA = 4$, а каждая из плоскостей боковых граней KAB, KBC, KCD, KDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины K, равна 2.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

Ответ. а) $\dfrac{4}{3}$; б) 48.

Пусть KH – высота пирамиды, $(KH = h)$, P – проекция K на прямую AB. Тогда KHP – прямоугольный треугольник с углом $\angle KPH = 45^\circ$, откуда $HP = h \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = h$. Аналогично доказывается, что точка H удалена от каждой из прямых BC, CD, DA на расстояние $r = h$ (иначе говоря, окружность радиуса r с центром H касается прямых AB, BC, CD, DA).

Треугольники BAD и BCD равны по трем сторонам, поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали BD. Его площадь S равна $2S_{BAD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD$, поэтому $S \leqslant AB \cdot AD = 12$. Равенство достигается, когда $\angle BAD = 90^\circ$, поэтому $S_{\max} = 12$.

Точка H лежит на внутренней или внешней биссектрисе каждого из углов четырехугольника $ABCD$. BD является внутренней биссектрисой углов B и D. Внешние биссектрисы углов B и D параллельны, поэтому H обязана лежать на BD. Обозначим через I и J точки пересечения внутренней и внешней биссектрис угла A с прямой BD. Тогда I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$ (пусть ее радиус равен r_1); J – центр окружности, касающейся продолжений сторон четырехугольника $ABCD$ (вневписанной окружности, пусть ее радиус равен r_2). Площадь четырёхугольника, в который вписана окружность может быть задана формулой $S = \frac{(AB+BC+CD+DA)r_1}{2}$, откуда $r_1 = \frac{S}{7}$. Также $S = S_{ADJ} + S_{CDJ} - S_{ABJ} - S_{BCJ} = \frac{(AD+CD-AB-BC)r_2}{2}$, откуда $r_2 = S$.

Пирамида удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда (1) высота проходит через центр вписанной в основание окружности (т.е. $H = I$) и при этом её длина равна $h = r_1 = \frac{S}{7}$ или (2) высота проходит через центр вневписанной окружности (т.е. $H = J$) и $h = r_2 = S$.

а) При $h = 2$ первый случай невозможен ($S = 7r_1 = 7h = 14 > 12$). Поэтому остаётся второй случай, и тогда $S = r_2 = h = 2$. Объём равен $V = \frac{Sh}{3} = \frac{4}{3}$.

б) Объём в первом и во втором случае равен $V_1 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{21}$ и $V_2 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{3}$. Наибольший объём $V_{\max} = \frac{S^2_{\max}}{3} = 48$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 12

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. 15.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x - n - 1{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 14$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 14$, откуда $a = -4$, $c = 15$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наибольшее значение функции.

2. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\dfrac{2}{3}$, а числа $\dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{6}{\sin y}$, $\dfrac{1}{\sin z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\sin^2 y$.

Ответ. $\dfrac{5}{8}$.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получаем $y = \frac{x+z}{2}$, $\frac{12}{\sin y} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin z}$. Преобразуем второе равенство:

$$\frac{12}{\sin y} = \frac{\sin x + \sin z}{\sin x \sin z} \Leftrightarrow \frac{12}{\sin y} = \frac{2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}}{0{,}5\,(\cos(x-z) - \cos(x+z))}.$$

Подставляя сюда, что $x + z = 2y$, $x - z = -2\alpha$, получаем $\dfrac{3}{\sin y} = \dfrac{\sin y\cos\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 2y}$. Это равенство на ОДЗ равносильно следующему:

$$3 - 6\sin^2\alpha - 3 + 6\sin^2 y = \sin^2 y\cos\alpha \Leftrightarrow (6 - \cos\alpha)\sin^2 y = 6\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2 y = \frac{6\sin^2\alpha}{6 - \cos\alpha}.$$

Так как $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$, то $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, и окончательно получаем $\sin^2 y = \frac{5}{8}$.

3. Решите неравенство $8^{\log_2^2 x} - 2\cdot x^{\log_2 x} \geqslant \log_6 108 + \left(4 - \log_6^2 3\right)\log_{108} 6$.

Ответ. $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства:

$$\log_6 108 + \left(4 - \log_6^2 3\right)\log_{108} 6 = 2 + \log_6 3 + \frac{(2 - \log_6 3)(2 + \log_6 3)}{\log_6 108} = 2 + \log_6 3 + \frac{(2 - \log_6 3)(2 + \log_6 3)}{2 + \log_6 3} = 4.$$

Обозначим $2^{\log_2^2 x} = v$. Тогда $x^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} = v$ и неравенство принимает вид $v^3 - 2v - 4 \geqslant 0$.

Одним из корней многочлена в левой части является $v = 2$. Выделив множитель $v - 2$, получаем $(v - 2)\left(v^2 + 2v + 2\right) \geqslant 0$, откуда $v \geqslant 2$ (так как $v > 0$, то второй множитель положителен). Находим x:

$$2^{\log_2^2 x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x \geqslant 1,\\ \log_2 x \leqslant -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty).$$

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*).

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 2 : 1 : 3$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 12$; б) $\angle DAC = 45°$, $S_{ABCD} = 68$.

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому

 © МФТИ, 2017

он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 12$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90^\circ$, то $\angle DAC = 45^\circ$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5AC \cdot DT = 16$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 4$, $AM = AK = 8$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $144 = (x+4)^2 + (x+8)^2$, $x^2 + 12x - 32 = 0$, $x = \sqrt{68} - 6$. Тогда $AB = \sqrt{68} + 2$, $BC = \sqrt{68} - 2$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5AB \cdot BC = 32$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $36 + 32 = 68$.

5. Дано число $200\ldots002$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 66. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 27100.

Решение. $66 = 3 \cdot 2 \cdot 11$. Делимость на 2 выполнена в любом случае, так как число оканчивается двойкой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1; 9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 3 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $4 + 11 = 15$). Подходят следующие пары цифр: $2 - -9$, $3 - -8$, $4 - -7$, $5 - -6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (100 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бóльшую цифру (49 способов) – итого выходит $4 \cdot 100 \cdot 49 = 19600$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 3 надо, чтобы $4 + 2k \,\vdots\, 3$. Этому условию удовлетворяют $k = 1$, $k = 4$ и $k = 7$. Такая замена может быть осуществлена $3 \cdot 50 \cdot 50 = 7500$ способами (выбираем одну из трёх цифр, а затем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $19600 + 7500 = 27100$ способов.

6. Найдите все значения параметра a такие, что система

$$\begin{cases} \arccos\left(\dfrac{4-y}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{a+x}{2}\right), \\ x^2 + y^2 + 2x - 8y = b \end{cases}$$

имеет не более одного решения при любом значении параметра b.

Ответ. $a \in (-\infty; -9] \cup [11; +\infty)$.

Решение. Первое уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $\frac{4-y}{4} = \frac{a+x}{2}$, $y = 4 - 2a - 2x$. ОДЗ определяется неравенством $-1 \leqslant \frac{4-y}{4} \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 8$. Итак, первое уравнение задаёт отрезок AB на плоскости, расположение которого зависит от параметра a.

Второе уравнение может быть переписано в виде $(x+1)^2 + (y-4)^2 = b + 17$ – это уравнение окружности с центром $M(-1;\,4)$ радиуса $\sqrt{b+17}$ (также может быть точка или пустое множество, но тогда при любом a не более одного решения).

Система имеет не более одного решения при любом b тогда и только тогда, когда перпендикуляр, опущенный из M на прямую, содержащую отрезок AB, не попадает во внутреннюю точку отрезка (если окружность пересекает прямую, то точки пересечения находятся по разные стороны от проекции центра окружности на прямую).

Составим уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной AB. Поскольку произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то её угловой коэффициент равен $\frac{1}{2}$ и её уравнение имеет вид $y - 4 = \frac{1}{4}(x+1)$, т.е. $y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$. Ордината точки пересечения этой прямой и прямой AB может быть найдена из системы уравнений $y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$, $y = 4 - 2a - 2x$ – это $y_0 = \frac{22-2a}{5}$. Чтобы эта точка не оказалась внутренней точкой отрезка, необходимо и достаточно, чтобы $y_0 \notin (0;\,8)$, откуда $a \leqslant -9$ или $a \geqslant 11$.

 © МФТИ, 2017

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $TABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней TAB, TBC, TCD, TDA составляет угол 60° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины T, равна 2.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

Ответ. а) $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Пусть TH – высота пирамиды, $(TH = h)$, P – проекция T на прямую AB. Тогда THP – прямоугольный треугольник с углом $\angle TPH = 60^\circ$, откуда $HP = h \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Аналогично доказывается, что точка H удалена от каждой из прямых BC, CD, DA на расстояние $r = \frac{h}{\sqrt{3}}$ (иначе говоря, окружность радиуса r с центром H касается прямых AB, BC, CD, DA).

Треугольники BAD и BCD равны по трем сторонам, поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали BD. Его площадь S равна $2S_{BAD} = AB \cdot AD \sin \angle BAD$, поэтому $S \leqslant AB \cdot AD = 2$. Равенство достигается, когда $\angle BAD = 90^\circ$, поэтому $S_{\max} = 2$.

Точка H лежит на внутренней или внешней биссектрисе каждого из углов четырехугольника $ABCD$. BD является внутренней биссектрисой углов B и D. Внешние биссектрисы углов B и D параллельны, поэтому H обязана лежать на BD. Обозначим через I и J точки пересечения внутренней и внешней биссектрис угла A с прямой BD. Тогда I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$ (пусть её радиус равен r_1); J – центр окружности, касающейся продолжений сторон четырехугольника $ABCD$ (вневписанной окружности, пусть её радиус равен r_2). Площадь четырёхугольника, в который вписана окружность может быть задана формулой $S = \frac{(AB+BC+CD+DA)r_1}{2}$, откуда $r_1 = \frac{S}{3}$. Также $S = S_{ADJ} + S_{CDJ} - S_{ABJ} - S_{BCJ} = \frac{(AD+CD-AB-BC)r_2}{2}$, откуда $r_2 = S$.

Пирамида удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда (1) высота проходит через центр вписанной в основание окружности (т.е. $H = I$) и при этом её длина равна $h = r_1 = \frac{S}{3}$ или (2) высота проходит через центр вневписанной окружности (т.е. $H = J$) и $h = r_2 = S$.

а) При $h = 2$ первый случай невозможен ($S = 3r_1 = h\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 6$). Поэтому остаётся второй случай, и тогда $S = r_2 = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Объём равен $V = \frac{Sh}{3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

б) Объём в первом и во втором случае равен $V_1 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{3\sqrt{3}}$ и $V_2 = \frac{Sh}{3} = \frac{S^2}{\sqrt{3}}$. Наибольший объём $V_{\max} = \frac{S^2_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

© МФТИ, 2017