# БИЛЕТ 5

**1.** Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили $x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли $x^2$, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$ , если к нему прибавить $2x^2$?

**Ответ.** Увеличится на $\dfrac{3}{2}$.

**Решение.** Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить $x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 1, \\ -\frac{b^2}{4a-4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+4} = 1, \\ \frac{b^2}{4a-4} - \frac{b^2}{4a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a(a+1)} = 1, \\ \frac{b^2}{4a(a-1)} = 3. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{3}$, откуда $a = 2$. Тогда $b^2 = 24$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{24}{8} + c = -3 + c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $2x^2$, то выйдет функция $(a+2)x^2 + bx + c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+8} + c = -\frac{24}{16} + c = -\frac{3}{2} + c$, что на $\frac{3}{2}$ больше минимума исходной функции.

**2.** Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5$.

**Ответ.** $x \in [3;\ 35) \cup (120;\ +\infty)$.

**Решение.** Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x+1}-9\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \left|\sqrt{x+1}-9\right| > 5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} = t$. Тогда получаем

$$t + \left|t^2 - 7\right| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 7 > 5 - t, \\ t^2 - 7 < -5 + t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 + t - 12 > 0, \\ t^2 - t - 2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty), \\ t \in (-1;\ 2). \end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной $x$, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x+1}-2} < -4, \\ \sqrt{\sqrt{x+1}-2} > 3, \\ -1 < \sqrt{\sqrt{x+1}-2} < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - 2 > 9, \\ 0 \leqslant \sqrt{x+1} - 2 < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 121, \\ 4 \leqslant x + 1 < 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 120, \\ 3 \leqslant x < 35. \end{array}\right.$$

**3.** На сторонах треугольника $ABC$ отметили точки: 10 – на стороне $AB$, 11 – на стороне $BC$, 12 – на стороне $AC$. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

**Ответ.** 4951.

**Решение.** Три точки из 33 данных можно выбрать $C_{33}^3 = 5456$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3 + C_{11}^3 + C_{10}^3 = 220 + 165 + 120 = 505$ способов. Значит, всего есть $5456 - 505 = 4951$ треугольник.

**4.** Продолжение высоты $BH$ треугольника $ABC$ пересекает описанную около него окружность в точке $D$ (*точки $B$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $AC$*). Градусные меры дуг $AD$ и $CD$, не содержащих точки $B$, равны $60^\circ$ и $90^\circ$ соответственно. Определите, в каком отношении отрезок $BD$ делится стороной $AC$.

**Ответ.** $\sqrt{3} : 1$.

**Решение.** По теореме о вписанном угле угол $DCA$ равен половине дуги $AD$, а угол $DBC$ равен половине дуги $CD$. Значит, $\angle DCH = 30^\circ$, $\angle HBC = 45^\circ$. Тогда треугольник $BHC$ – прямоугольный и равнобедренный, $BH = HC$. Но $HD = CH \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CH}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $BH : HD = \sqrt{3} : 1$.

**5.** На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50; 30)$. Найдите количество таких квадратов.

**Ответ.** 930.

**Решение.** Проведём через данную точку $(50; 30)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 50$ и $y = 30$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 30 способами: $(50;\ 0), (50;\ 1), \ldots, (50;\ 29)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 50$ и $y = 30$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $20 \leqslant x \leqslant 49$, $0 \leqslant y \leqslant 29$. Получаем $30^2$ способов.

Общее количество способов равно $30^2 + 30 = 31 \cdot 30 = 930$.

**6.** а) Изобразите на координатной плоскости фигуру $\Phi$, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leqslant 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры $\Phi$ и расстояние от точки $T(0; 4)$ до ближайшей точки фигуры $\Phi$.

**Ответ.** $S = 2\pi$; $\rho = 2\sqrt{2} - 2$.

**Решение.** Преобразуем первое неравенство: $(x - y)(x + y) - 2(x - y) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 2) \leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y = x$ и $y = 2 - x$ (точки $(0; \pm 10)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$. Оно задаёт круг с центром $G(2; 2)$ радиуса 2. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура $\Phi$ составляет ровно половину круга радиуса 2, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$. Отметим точку $E$ пересечения отрезка $GT$ с окружностью. $TE$ – это и есть кратчайшее расстояние от точки $T$ до фигуры $\Phi$. $TE = TG - GE = 2\sqrt{2} - 2$.

**7.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BM$; $MD$ и $ME$ – биссектрисы треугольников $AMB$ и $CMB$ соответственно. Отрезки $BM$ и $DE$ пересекаются в точке $P$, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок $DE$.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

**Ответ.** а) $DE = 8$; б) $R = 2\sqrt{85}$.

**Решение.** а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник $PDM$ – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок $PM$, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников $BPD$ и $BMA$ находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть $EH$ – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 16$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 4\sqrt{17}$, $CH = CM - MH = 8$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 4\sqrt{5}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника $ACE$, поэтому её радиус $R$ равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 2\sqrt{85}$.

# БИЛЕТ 6

**1.** Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $x^2$, его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$ , если из него вычесть $2x^2$?

**Ответ.** Уменьшится на $\frac{27}{4}$.

**Решение.** Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $4x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-4)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-16}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+\frac{27}{2},\\ -\frac{b^2}{4a-16}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{4a-16}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{a(a-4)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-4}{4(a+1)}=\frac{3}{2}$, откуда $a=-2$. Тогда $b^2=108$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{108}{-8}+c=\frac{27}{2}+c$. Если из квадратного трёхчлена $f(x)$ вычесть $2x^2$, то выйдет функция $(a-2)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a-8}+c=-\frac{108}{-16}+c=\frac{27}{4}+c$, что на $\frac{27}{4}$ меньше максимума исходной функции.

**2.** Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\sqrt{x+99-20\sqrt{x-1}}>5$.

**Ответ.** $x\in[10;\ 50)\cup(145;\ +\infty)$.

**Решение.** Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x-1}-10\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\left|\sqrt{x-1}-10\right|>5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}=t$. Тогда получаем

$$t+\left|t^2-7\right|>5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-7>5-t,\\ t^2-7<-5+t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-12>0,\\ t^2-t-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)\,,\\ t\in(-1;\,2)\,.\end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной $x$, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<-4,\\ \sqrt{\sqrt{x-1}-3}>3,\\ -1<\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-3>9,\\ 0\leqslant\sqrt{x-1}-3<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1>144,\\ 9\leqslant x-1<49\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>145,\\ 10\leqslant x<50.\end{array}\right.$$

**3.** На сторонах треугольника $ABC$ отметили точки: 12 – на стороне $AB$, 9 – на стороне $BC$, 10 – на стороне $AC$. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

**Ответ.** 4071.

**Решение.** Три точки из 31 данной можно выбрать $C_{31}^3=4495$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3+C_9^3+C_{10}^3=220+84+120=424$ способа. Значит, всего есть $4495-424=4071$ треугольник.

**4.** Продолжение высоты $BH$ треугольника $ABC$ пересекает описанную около него окружность в точке $D$ (*точки $B$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $AC$*). Градусные меры дуг $AD$ и $CD$, не содержащих точки $B$, равны $120^\circ$ и $90^\circ$ соответственно. Определите, в каком отношении отрезок $BD$ делится стороной $AC$.

**Ответ.** $1:\sqrt{3}$.

**Решение.** По теореме о вписанном угле угол $DCA$ равен половине дуги $AD$, а угол $DBC$ равен половине дуги $CD$. Значит, $\angle DCH=60^\circ$, $\angle HBC=45^\circ$. Тогда треугольник $BHC$ – прямоугольный и равнобедренный, $BH=HC$. Но $HD=CH\operatorname{tg}60^\circ=CH\sqrt{3}$. Следовательно, $BH:HD=1:\sqrt{3}$.

**5.** На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 25)$. Найдите количество таких квадратов.

**Ответ.** 600.

**Решение.** Проведём через данную точку $(55; 25)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 55$ и $y = 25$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 24 способами: $(55;\ 1), (55;\ 2), \ldots, (55;\ 24)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 55$ и $y = 25$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $31 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 24$. Получаем $24^2$ способов.

Общее количество способов равно $24^2 + 24 = 24 \cdot 25 = 600$.

**6.** а) Изобразите на координатной плоскости фигуру $\Phi$, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \leqslant 3\,(x + y)\,, \\ x^2 + y^2 \leqslant 6y - 6x - 9. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры $\Phi$ и расстояние от точки $T\,(-6; 0)$ до ближайшей точки фигуры $\Phi$.

**Ответ.** $S = \dfrac{9\pi}{2}$; $\rho = 3\sqrt{2} - 3$.

**Решение.** Преобразуем первое неравенство: $(y - x)(y + x) - 3(y + x) \leqslant 0 \Leftrightarrow (y + x)(y - x - 3) \leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y = x$ и $y = 2 - x$ (точки $(\pm 10;\ 0)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 9$. Оно задаёт круг с центром $G(-3;\ 3)$ радиуса 3. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура $\Phi$ составляет ровно половину круга радиуса 3, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 9\pi = \frac{9\pi}{2}$. Отметим точку $E$ пересечения отрезка $GT$ с окружностью. $TE$ – это и есть кратчайшее расстояние от точки $T$ до фигуры $\Phi$. $TE = TG - GE = 3\sqrt{2} - 3$.

**7.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BM$; $MD$ и $ME$ – биссектрисы треугольников $AMB$ и $CMB$ соответственно. Отрезки $BM$ и $DE$ пересекаются в точке $P$, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

а) Найдите отрезок $DE$.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

**Ответ.** а) $DE = 6$; б) $R = 3\sqrt{65}$.

**Решение.** а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник $PDM$ – равнобедренный и $DP = MP = 3$. Аналогично получаем, что $EP = 3$ и тогда $DE = 6$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок $PM$, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников $BPD$ и $BMA$ находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть $EH$ – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 15$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 3\sqrt{26}$, $CH = CM - MH = 9$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 3\sqrt{10}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника $ACE$, поэтому её радиус $R$ равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 3\sqrt{65}$.

# БИЛЕТ 13

**1.** Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

**Ответ.** $\dfrac{39}{8}$.

**Решение.** Пусть $n$, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n+1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x-n-1{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 5$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 5$, откуда $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{39}{8}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

**2.** Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

**Ответ.** $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 3)$.

**Решение.** ОДЗ неравенства определяется условием $\frac{|x|-12}{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-12)(x+12)}{2-x} \geqslant 0$. С помощью метода интервалов получаем $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 12]$. На промежутке $x \in (-\infty; -12]$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому оно выполняется.

Рассмотрим промежуток $x \in (2; 12]$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и их можно возвести в квадрат: $\frac{|x|-12}{2-x} > x^2$. Так как рассматриваются значения $x$, большие 2, то знаменатель дроби отрицателен – можно умножить на него обе части неравенства и поменять знак. Кроме того, модуль можно опустить. Получаем $x - 12 < x^2(2-x) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 12 < 0$. Одним из корней многочлена в левой части является $x = 3$. Выделяем множитель $x-3$, и тогда неравенство принимает вид $(x-3)\left(x^2+x+4\right) < 0$, откуда $x < 3$. Значит, в этом случае $2 < x < 3$ и окончательно $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 3)$.

**3.** Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь $S$ фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

**Ответ:** 1260.

**Решение.** Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a; 0)$, $(0; b)$ и $(a; b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. $ab$. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел $a$ или $b$ должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 14 значений $a$ и 10 значений $b$, кратных 5. Значит, существует $14 \cdot 50 = 700$ пар $(a; b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $10 \cdot 70 = 700$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $14 \cdot 10 = 140$ пар таких, что оба числа $a$ и $b$ делятся на 5. Тогда всего искомых пар $700 + 700 - 140 = 1260$.

**4.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы $AA_1$ пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $A_2$. Найдите площади треугольников $OA_2C$ и $A_1A_2C$. ($O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$).

**Ответ:** $S_{\triangle OA_2C} = \dfrac{13}{4\sqrt{3}}$; $S_{\triangle A_1A_2C} = \dfrac{13}{7\sqrt{3}}$.

**Решение.** По теореме косинусов для треугольника $ABC$ находим, что $BC^2 = 16 + 9 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 13$, $BC = \sqrt{13}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности $R$ равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Угол $A_2OC$ – центральный, поэтому он вдвое больше угла $A_2AC$, который по условию равен $30^\circ$, поэтому $\angle A_2OC = 60^\circ$. Тогда площадь треугольника $OA_2C$ равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{13}{4\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 4 : 3$, откуда $A_1C = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7}\sqrt{13}$. Треугольник $OA_2C$ – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы $A_2CA_1$ и $A_2AB$ равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{13}{7\sqrt{3}}$.

 

**5.** Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

**Ответ.** 22100.

**Решение.** $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 5 выполнена в любом случае, так как число оканчивается пятёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

*Первый случай.* Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1; 9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16 + 11 = 27$). Подходят следующие пары цифр: $2 - -9$, $3 - -8$, $4 - -7$, $5 - -6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (100 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бóльшую цифру (49 способов) – итого выходит $4 \cdot 100 \cdot 49 = 19600$ способов.

*Второй случай.* Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через $k$), а для делимости на 9 надо, чтобы $16+2k \,\vdots\, 9$. Этому условию удовлетворяет только $k = 1$. Такая замена может быть осуществлена $50 \cdot 50 = 2500$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $19600 + 2500 = 22100$ способов.

**6.** Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $P$, а лучи $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $Q$. Известно, что треугольники $ADP$ и $QAB$ подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите $AC$.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники $ABC$ и $ACD$ касаются отрезка $AC$ в точках $K$ и $T$ соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка $T$ лежит между $K$ и $A$). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

**Ответ.** а) $AC = 14$; б) $\angle DAC = 45^\circ$, $S_{ABCD} = 97$.

**Решение.** а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине $A$ у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника $CDQ$, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, $AC$ – диаметр окружности, $AC = 14$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон $AB$ и $BC$ соответственно в точках $M$ и $N$, а окружность, вписанная в треугольник $ACD$, касается его сторон $AD$ и $CD$ соответственно в точках $L$ и $G$. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник $ACD$ – равнобедренный, а так как $\angle D = 90^\circ$, то $\angle DAC = 45^\circ$. Площадь треугольника $ACD$ равна $0{,}5AC \cdot DT = 49$.

Применим теперь для треугольника $ABC$ свойство касательных: $CN = CK = 6$, $AM = AK = 8$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника $ABC$ получаем $196 = (x+8)^2+(x+6)^2$, $x^2+14x-48 = 0$, $x = \sqrt{97} - 7$. Тогда $AB = \sqrt{97} + 1$, $BC = \sqrt{97} - 1$ и площадь треугольника $ABC$ равна $0{,}5AB \cdot BC = 48$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $49 + 48 = 97$.

**7.** Изобразите на плоскости фигуру $\Phi$, состоящую из точек $(x; y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leqslant 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура $\Phi$.

**Решение.** Первое неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 4x + 4 \leqslant 4x^2 + 4x + 1, \\ (x+2)^2 - 3y^2 \geqslant 0, \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ \left(x + 2 - y\sqrt{3}\right)\left(x + 2 + y\sqrt{3}\right) \geqslant 0, \\ x \geqslant -0{,}5. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств вместе со вторым неравенством исходной системы определяет множество точек, находящихся между двумя концентрическими окружностями с центром в $(0; 0)$ радиусов 1 и 2. Третье неравенство задаёт полуплоскость справа от прямой $x = -0{,}5$. Второе неравенство определяет два вертикальных угла, границами которых являются прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ с уравнениями $y = \pm\frac{x+2}{\sqrt{3}}$ (такие два угла, что точка $(0;0)$ лежит внутри одного из них). При этом прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ обе проходят через точку $(-2;0)$, лежащую на большей окружности, и касаются меньшей окружности в точках $\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (координаты точек касания могут быть найдены путём решения соответствующих систем уравнений).

Пересекая все указанные множества, получаем фигуру $\Phi$, состоящую, как несложно видеть, из одной части.

 

# БИЛЕТ 14

**1.** Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения $-9$, $-9$ и $-15$. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

**Ответ.** $-\dfrac{33}{4}$.

**Решение.** Пусть $n$, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_\text{в}$, то $x_\text{в} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x-n-0{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = -9$, $f(n+2) = -15$, то получаем $\frac{a}{4} + c = -9$, $\frac{9a}{4} + c = -15$, откуда $a = -3$, $c = -\frac{33}{4}$. Но $c = f(x_\text{в})$ и есть наибольшее значение функции.

**2.** Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{20-|x|}{x-3}} > x.$$

**Ответ.** $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 4)$.

**Решение.** ОДЗ неравенства определяется условием $\frac{20-|x|}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(20-x)(20+x)}{x-3} \geqslant 0$. С помощью метода интервалов получаем $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 20]$. На промежутке $x \in (-\infty; -20]$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому оно выполняется.

Рассмотрим промежуток $x \in (3; 20]$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и их можно возвести в квадрат: $\frac{20-|x|}{x-3} > x^2$. Так как рассматриваются значения $x$, большие 3, то знаменатель дроби положителен – можно умножить на него обе части неравенства. Кроме того, модуль можно опустить. Получаем $20 - x > x^2(x-3) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - 20 < 0$. Одним из корней многочлена в левой части является $x = 4$. Выделяем множитель $x - 4$, и тогда неравенство принимает вид $(x-4)\left(x^2+x+5\right) < 0$, откуда $x < 4$. Значит, в этом случае $3 < x < 4$ и окончательно $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 4)$.

**3.** Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь $S$ фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

**Ответ:** 864.

**Решение.** Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a; 0)$, $(0; b)$ и $(a; b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. $ab$. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел $a$ или $b$ должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 16 значений $a$ и 6 значений $b$, кратных 5. Значит, существует $16 \cdot 30 = 480$ пар $(a; b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $6 \cdot 80 = 480$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $16 \cdot 6 = 96$ пар таких, что оба числа $a$ и $b$ делятся на 5. Тогда всего искомых пар $480 + 480 - 96 = 864$.

**4.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы $AA_1$ пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $A_2$. Найдите площади треугольников $OA_2C$ и $A_1A_2C$. ($O$ – центр окружности, описанной около треугольника $ABC$).

**Ответ:** $S_{\triangle OA_2C} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$; $S_{\triangle A_1A_2C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5}$.

**Решение.** По теореме косинусов для треугольника $ABC$ находим, что $BC^2 = 16 + 36 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 28$, $BC = \sqrt{28}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности $R$ равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$. Угол $A_2OC$ – центральный, поэтому он вдвое больше угла $A_2AC$, который по условию равен $30^\circ$, поэтому $\angle A_2OC = 60^\circ$. Тогда площадь треугольника $OA_2C$ равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 6 : 4$, откуда $A_1C = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}\sqrt{28}$. Треугольник $OA_2C$ – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы $A_2CA_1$ и $A_2AB$ равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{5}$.

**5.** Дано число $800\ldots008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

**Ответ.** 14080.

**Решение.** $198 = 2 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 2 выполнена в любом случае, так как число оканчивается восьмёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

*Первый случай.* Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1;9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16+11=27$). Подходят следующие пары цифр: $2--9$, $3--8$, $4--7$, $5--6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (80 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бо́льшую цифру (39 способов) – итого выходит $4 \cdot 80 \cdot 39 = 12480$ способов.

*Второй случай.* Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через $k$), а для делимости на 9 надо, чтобы $16+2k \,\vdots\, 9$. Этому условию удовлетворяет только $k=1$. Такая замена может быть осуществлена $40 \cdot 40 = 1600$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $12480 + 1600 = 14080$ способов.

**6.** Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $P$, а лучи $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $Q$. Известно, что треугольники $ADP$ и $QAB$ подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 4.

а) Найдите $AC$.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники $ABC$ и $ACD$ касаются отрезка $AC$ в точках $K$ и $T$ соответственно, причём $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$ (точка $T$ лежит между $K$ и $A$). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

**Ответ.** а) $AC = 8$; б) $\angle DAC = 45^\circ$, $S_{ABCD} = 31$.

**Решение.** а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине $A$ у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника $CDQ$, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, $AC$ – диаметр окружности, $AC = 8$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон $AB$ и $BC$ соответственно в точках $M$ и $N$, а окружность, вписанная в треугольник $ACD$, касается его сторон $AD$ и $CD$ соответственно в точках $L$ и $G$. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник $ACD$ – равнобедренный, а так как $\angle D = 90^\circ$, то $\angle DAC = 45^\circ$. Площадь треугольника $ACD$ равна $0{,}5 AC \cdot DT = 16$.

Применим теперь для треугольника $ABC$ свойство касательных: $CN = CK = 3$, $AM = AK = 5$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника $ABC$ получаем $64 = (x+5)^2 + (x+3)^2$, $x^2 + 8x - 15 = 0$, $x = \sqrt{31} - 4$. Тогда $AB = \sqrt{31} + 1$, $BC = \sqrt{31} - 1$ и площадь треугольника $ABC$ равна $0{,}5 AB \cdot BC = 15$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $16 + 15 = 31$.

**7.** Изобразите на плоскости фигуру $\Phi$, состоящую из точек $(x;y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x^2 - 6y + 9} \leqslant 3y - 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура $\Phi$.

**Решение.** Первое неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - 8x^2 - 6y + 9 \leqslant 9y^2 - 6y + 1, \\ (y-3)^2 - 8x^2 \geqslant 0, \\ 3y - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ \left(y - 3 - 2x\sqrt{2}\right)\left(y - 3 + 2x\sqrt{2}\right) \geqslant 0, \\ y \geqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств вместе со вторым неравенством исходной системы определяет множество точек, находящихся между двумя концентрическими окружностями с центром в $(0;0)$ радиусов 1 и 2. Третье неравенство задаёт полуплоскость сверху от прямой $y = \frac{1}{3}$. Второе неравенство определяет два вертикальных угла, границами которых являются прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ с уравнениями $y = 3 \pm 2x\sqrt{2}$ (такие два угла, что точка $(0;0)$ лежит внутри одного из них). При этом прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ обе проходят через точку $(3;0)$ и касаются меньшей окружности в точках $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ (координаты точек касания могут быть найдены путём решения соответствующих систем уравнений).

Пересекая все указанные множества, получаем фигуру $\Phi$, состоящую, как несложно видеть, из одной части.

 