МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+11x+23$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geq 1+\sqrt{x+1}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-1|+\frac{x^2-7x+12}{3-x}=0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\frac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

6. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABC с углом 120° при вершине C. В треугольники AKC и BKC вписаны окружности с центрами O и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OQC, если $OK=6$, $KQ=7$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+3x+\frac{253}{4}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{3-x}} \geq 1+\sqrt{3-x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x+1|+\frac{x^2-5x+6}{2-x}=0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sqrt{y-3x}+3x=12, \\ y^2+y-3x-9x^2=144. \end{cases}$$

6. Точка P лежит на стороне BC треугольника ABC с углом 60° при вершине A. В треугольники APB и APC вписаны окружности с центрами D и T соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADT, если $PD=7$, $PT=4$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+9x+19$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-6}{2-\sqrt{x+4}} \geq 2+\sqrt{x+4}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|2-x|+\frac{x^2-x-6}{3-x}=0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5, \\ 4x^2+2x+3y-9y^2=32. \end{cases}$$

6. Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO=2$, $AF=7$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 5x + 39$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x}-12}{1-\sqrt{2-x}} \geq 1 + \sqrt{2-x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|2+x| + \frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3x-y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$$

6. Точка N лежит на стороне DE треугольника CDE с углом 60° при вершине C. В треугольники CNE и CDE вписаны окружности с центрами K и P соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKP, если $KN = 8$, $NP = 7$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+13x+42$.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-7x^2+7x=1$.

3. В числе $2016****02**$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 \leq 4, \\ y+2x \leq 0\end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и T соответственно, причём $AK:KB=3:2$, $BT:TC=1:2$. Найдите AC, если $KT=\sqrt{6}$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+7x+54$.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3+6x^2+6x=-1$.

3. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}(|x|-x)^2+(|y|-y)^2\le 16,\\ 2y+x\le 0\end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}x-3\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{x}{y}}+6=0,\\ x^2y^2+x^4=82.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает его стороны AC и BC в точках Q и N соответственно, причём $AQ:QC=5:2$, $CN:NB=5:2$. Найдите AB, если $QN=5\sqrt{2}$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР _______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+5x+72$.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-9x^2+9x=1$.

3. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}(|x|+x)^2+(|y|+y)^2\le 4,\\ 3y+x\le 0\end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}2x-\sqrt{xy}-4\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0,\\ 2x^2+x^2y^4=18y^2.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины A и K треугольника AKT и пересекает его стороны AT и KT в точках C и N соответственно, причём $AC:CT=4:1$, $TN:NK=1:2$. Найдите AK, если $CN=\sqrt{10}$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+20x+63$.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-8x^2+8x=1$.

3. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}(|x|+x)^2+(|y|-y)^2 \leq 16,\\ y-3x \leq 0\end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}3y-\sqrt{\frac{y}{x}}-6\sqrt{xy}+2=0,\\ x^2+81x^2y^4=2y^2.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF:FM=3:1$, $PB:BM=6:5$. Найдите KP, если $BF=\sqrt{15}$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 25 ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{9}+50$.

2. Решите неравенство
$$8\left|x-\sqrt{x}+2\right|+2x\sqrt{x}<x^2+x+28.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x|+|8y|+|120-15x-8y|=120$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2y+xy^2-2x-2y+10=0, \\ x^3y-xy^3-2x^2+2y^2-30=0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины A и N треугольника ACN и пересекает его стороны AC и CN соответственно в точках B и K, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BCK к площади треугольника ACN равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $AN:BK$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BCN и ACK равно $\frac{9}{16}$. Найдите отношение $NK:AB$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 26 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+70$.

2. Решите неравенство

$$4x^2+x+9>2\left|4x-2\sqrt{x}+3\right|+4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x|+|4y|+|48-3x-4y|=48$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y-xy^2-3x+3y+1=0, \\ x^3y-xy^3-3x^2+3y^2+3=0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины L и M треугольника FLM и пересекает его стороны FL и FM соответственно в точках A и H, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника FLM к площади треугольника AFH равно $\frac{49}{9}$.

а) Найдите отношение $LM:AH$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников AFM и FHL равно $\frac{1}{4}$. Найдите отношение $AL:MH$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 27 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{9}+33$.

2. Решите неравенство

$$x^2+x+20>8\left|x-\sqrt{x}+1\right|+2x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,6,7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x|+|12y|+|60-5x-12y|=60$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y+xy^2+3x+3y+24=0, \\ x^3y-xy^3+3x^2-3y^2-48=0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $\frac{9}{121}$.

а) Найдите отношение $QE:BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ:DE$.

© МФТИ, 2016

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 28 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+98$.

2. Решите неравенство

$$4x^2+x+5>2\left|4x-2\sqrt{x}+1\right|+4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x|+|3y|+|24-4x-3y|=24$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y-xy^2-5x+5y+3=0, \\ x^3y-xy^3-5x^2+5y^2+15=0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины P и T треугольника MPT и пересекает его стороны MP и MT соответственно в точках D и E, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника MDE к площади треугольника MPT равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $DE:TP$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников MDT и EMP равно $\frac{4}{9}$. Найдите отношение $TE:PD$.

© МФТИ, 2016