

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 9

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}} \left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4} \right) \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = 2, CD = 1, DE = 3$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+9| + |x+2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны $B_1 D$ и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю $B_1 D$, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1 H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок $B_1 D$ и объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 10

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \left(\frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \right) \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-4| + |x+12| - 3)(x^2 + y^2 - 12) = 0, \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N , при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{1}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 11

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}} \left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25} \right) \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos x + 2 \cos 6x)^2 = 9 + \sin^2 3x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x+3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = CD = 1$, $BC = DE = 2$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-10| + |x+3| - 2)(x^2 + y^2 - 6) = 0, \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны $B_1 D$ и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю $B_1 D$, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1 H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{3}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок $B_1 D$ и объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 12

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-6}{4x-10}} \left(\frac{(x^2-6)(4x-10)}{9} \right) \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos 2x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \cos^2 5x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3x-y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = 4, BC = DE = 2, CD = 3$, Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+2| + |x-11| - 3)(x^2 + y^2 - 13) = 0, \\ (x-5)^2 + (y+2)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N , при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 2 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 21

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{2 \sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 5|\cos x|.$$

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$17^{\frac{5x-3}{3-x}} \cdot 2^{3-x} \leq 68.$$

4. Окружность ω радиуса b с центром O вписана в остроугольный треугольник CFM и касается его сторон CM и FM в точках P и K соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ с центром T описана около треугольника PKM .

а) Найдите OM .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника CFT к площади треугольника CFM равно $\frac{5}{8}$. Найдите длину биссектрисы MA треугольника CFM , а также его площадь.

5. В числе 2016****02** нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |16 + 6x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2, \\ (a + 15)y + 15x - a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром BC пересекает рёбра AC и AB соответственно в точках P и Q , отличных от вершин призмы. Отрезки B_1P и C_1Q пересекаются в точке T , и при этом $B_1P = 5$, $TQ = 2$.

а) Найдите угол TPA .

б) Найдите отношение $AP : CP$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC = 3$. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 22

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|.$$

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{x+5}{5^{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75.$$

4. Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{65}}{2}$ с центром T описана около треугольника PQM .

а) Найдите OQ .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $\frac{2}{3}$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ , а также его площадь.

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N , отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P , и при этом $A_1N = 7$, $C_1P = 6$.

а) Найдите угол PFA .

б) Найдите отношение $AF : FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB = 6$. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 23

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{3 \sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 7|\cos x|.$$

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{xy} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0, \\ 2x^2 + x^2y^4 = 18y^2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$11^{\frac{3x-4}{4-x}} \cdot 3^{4-x} \leq 99.$$

4. Окружность ω радиуса 8 с центром O вписана в остроугольный треугольник ENT и касается его сторон EN и NT в точках C и A соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{145}}{2}$ с центром

B описана около треугольника ACN .

а) Найдите ON .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника BTE к площади треугольника ENT равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы NL треугольника ENT , а также его площадь.

5. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 7, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 - x^2 - y^2 - 2y| + |-2y| = 9 - x^2 - y^2 - 4y, \\ 15y + 3a = (4a + 15)x. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1C_1 пересекает рёбра B_1C_1 и A_1B_1 соответственно в точках N_1 и K_1 , отличных от вершин призмы. Отрезки AN_1 и CK_1 пересекаются в точке F , и при этом $AN_1 = 7$, $CF = 4$.

а) Найдите угол FN_1B_1 .

б) Найдите отношение $C_1N_1 : N_1B_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $BC = 8$. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 24

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{2 \sin 3x}{\sin x} - \frac{3 \cos 3x}{\cos x} = 7|\sin x|.$$

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$2^{\frac{1-x}{3+x}} \cdot 7^{3+x} \geq 56.$$

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник ABC и касается его сторон AB и BC в точках F и T соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{85}}{2}$ с центром M описана около треугольника BFT .

а) Найдите BO .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника ACM к площади треугольника ABC равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы BQ треугольника ABC , а также его площадь.

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |4 - 2x - x^2 - y^2| + |-2x| = 4 - 4x - x^2 - y^2, \\ (3a + 15)x = 3y + a + 4. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1B_1 пересекает рёбра A_1C_1 и B_1C_1 соответственно в точках T_1 и L_1 , отличных от вершин призмы. Отрезки BT_1 и AL_1 пересекаются в точке S , и при этом $AL_1 = 7$, $ST_1 = 2$.

а) Найдите угол ST_1A_1 .

б) Найдите отношение $A_1T_1 : T_1C_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC = 5$. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 33

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3 + 5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3 + 18x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M . Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE . Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC , угол CBD и площадь треугольника ABC .

5. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \sqrt{\frac{35}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка AK .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 34

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$(x^2 - x + 1)^{16x^3 - 6x} \leq (x^2 - x + 1)^{13x^2 + x^3}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x - \sin 2x} = -3 \cdot |\sin 2x|$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке G . Окружность, построенная на отрезке LG как на диаметре, проходит через вершину M и касается прямой DE . Известно, что $GM = 6$. Найдите высоту KT треугольника KLM , угол LGM и площадь треугольника KLM .

5. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48, \\ (x - 8)^2 + \left(y + 6 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 = (a + 4)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6. Сфера Ω радиуса $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки M и K такие, что $KM \parallel AB$, а плоскости ACK и MB_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка BK .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 35

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$(x^2 + 3x + 3)^{5x^3 - 3x^2} \leq (x^2 + 3x + 3)^{3x^3 + 5x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = -4 \cdot |\sin 2x|.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3 y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке K . Окружность, построенная на отрезке CK как на диаметре, проходит через вершину B и касается прямой DE . Известно, что $DK = 3$. Найдите высоту AH треугольника ABC , радиус окружности и площадь треугольника ABC .

5. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 6, 7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60, \\ \left(x + 6 \sin \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+3}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки T и F такие, что $FT \parallel BC$, а плоскости ABT и FA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка CT .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 36

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$(x^2 + x + 1)^{4x^3 + x^2} \geq (x^2 + x + 1)^{x - 2x^3}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 8x + \sin 4x}{\cos 5x + \cos x} = 6|\sin 2x|.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке T . Окружность, построенная на отрезке MT как на диаметре, проходит через вершину L и касается прямой DE . Известно, что $DT = 2$. Найдите высоту KH треугольника KLM , угол ETD и площадь треугольника KLM .

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24, \\ (x - 3)^2 + \left(y - 4 \sin \frac{a\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 5. Сфера Ω радиуса $r = \frac{\sqrt{33}}{4}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки F и L такие, что $FL \parallel BC$, а плоскости LAC и FA_1B_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка CF .