

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $4p+5$, $2p$ и $|p-3|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Найдите значение выражения $\cos^4 \frac{5\pi}{24} + \cos^4 \frac{11\pi}{24} + \sin^4 \frac{19\pi}{24} + \sin^4 \frac{13\pi}{24}$.
3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+9| + |x+2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Точка F – середина дуги PN , не содержащей точки Q . Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN , равны соответственно 5 и $\frac{20}{3}$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $|p-8|$, $2p-1$ и $4p+5$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Найдите значение выражения $\sin^4 \frac{\pi}{24} + \cos^4 \frac{5\pi}{24} + \sin^4 \frac{19\pi}{24} + \cos^4 \frac{23\pi}{24}$.
3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?
4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-4| + |x+12| - 3)(x^2 + y^2 - 12) = 0, \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника FKT с основанием KT описана окружность Ω . Точка M – середина дуги FT , не содержащей точки K . Известно, что расстояния от точки M до прямых KT и FT , равны соответственно $\frac{9}{5}$ и 1. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника FKT .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 7

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $9p+10$, $3p$ и $|p-8|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Найдите значение выражения $\sin^4 \frac{5\pi}{24} + \cos^4 \frac{7\pi}{24} + \sin^4 \frac{17\pi}{24} + \cos^4 \frac{19\pi}{24}$.
3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x+3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-10| + |x+3| - 2)(x^2 + y^2 - 6) = 0, \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника ABC с основанием BC описана окружность Ω . Точка T – середина дуги AC , не содержащей точки B . Известно, что расстояния от точки T до прямых AC и BC , равны соответственно 3 и 7. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 8

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $|p-3|$, $3p+1$ и $9p+10$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Найдите значение выражения $\cos^4 \frac{7\pi}{24} + \sin^4 \frac{11\pi}{24} + \sin^4 \frac{17\pi}{24} + \cos^4 \frac{13\pi}{24}$.
3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?
4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3x - y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+2| + |x-11| - 3)(x^2 + y^2 - 13) = 0, \\ (x-5)^2 + (y+2)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника CLE с основанием LE описана окружность Ω . Точка N – середина дуги CE , не содержащей точки L . Известно, что расстояния от точки N до прямых CE и EL , равны соответственно 6 и 9. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника CLE .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 17

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $p-2$, $2\cdot\sqrt{p}$ и $-3-p$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|16 + 6x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.
3. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ$.
4. В числе 2016****02** нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги PN , не содержащей точки Q , до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN , не содержащей точки P , до стороны QN равно 0,4. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 18

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $-p-12$, $2\cdot\sqrt{p}$ и $p-5$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.
3. Найдите значение выражения $4 \sin 40^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$.
4. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника ADE с основанием AD описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги DE , не содержащей точки A , до стороны DE равно 5, а расстояние от середины дуги AD , не содержащей точки E , до стороны AD равно $\frac{1}{3}$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ADE .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 19

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $p-2$, $3\cdot\sqrt{p}$ и $-8-p$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|9-x^2-y^2-2y|+|-2y|=9-x^2-y^2-4y$, и найдите площадь полученной фигуры.
3. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ$.
4. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{xy} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0, \\ 2x^2 + x^2y^4 = 18y^2. \end{cases}$$

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника BCD с основанием CD описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги BD , не содержащей точки C , до стороны BD равно 3, а расстояние от середины дуги CD , не содержащей точки B , до стороны CD равно 0,5. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника BCD .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 20

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения p , при каждом из которых числа $-p-8$, $3\cdot\sqrt{p}$ и $p-7$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.
2. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4-2x-x^2-y^2|+|-2x|=4-4x-x^2-y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.
3. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}50^\circ - 4\cos50^\circ$.
4. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0,2,4,7,8,9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника AMT с основанием MT описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги AT , не содержащей точки M , до стороны AT равно 3, а расстояние от середины дуги MT , не содержащей точки A , до стороны MT равно 1,6. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника AMT .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 29

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + 2\gamma) + \operatorname{tg} \alpha + \frac{5}{2} \operatorname{tg}(2\gamma) = 0$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Решите неравенство

$$8|x - \sqrt{x} + 2| + 2x\sqrt{x} < x^2 + x + 28.$$

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

6. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписан в окружность Ω . Хорды LM и PQ , параллельные прямой BC , пересекают сторону AB в точках D и T соответственно, и при этом $AD = DT = TB$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC , если $LM = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $PQ = \frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми LM и PQ .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 30

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + 6 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$.

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 9 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 3| + 4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

6. Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω . Хорды AB и CD , параллельные прямой PQ , пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT , если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 31

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + 2\gamma) + 2 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}(2\gamma) = 0$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$. Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Решите неравенство

$$x^2 + x + 20 > 8|x - \sqrt{x} + 1| + 2x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3 y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$$

6. Равнобедренный тупоугольный треугольник PQT с основанием PT вписан в окружность Ω . Хорды AB и CD , параллельные прямой PT , пересекают сторону QT в точках K и L соответственно, и при этом $QK = KL = LT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT , если $AB = 2\sqrt{66}$, $CD = 2\sqrt{114}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 32

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) - 4\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} \beta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$.

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 5 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 1| + 4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$$

6. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписан в окружность Ω . Хорды DN и LT , параллельные прямой AC , пересекают сторону BC в точках F и H соответственно, и при этом $BF = FH = HC$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC , если $DN = 2\sqrt{30}$, $LT = 2\sqrt{42}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми LT и AC .