

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}} \left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4} \right) \geq 1$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{2}) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-2}{2x-3} > 0$, $\frac{x^2-2}{2x-3} \neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty \right)$, $x \neq 1$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-2}{2x-3} - 1 \right) \left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4} - \frac{x^2-2}{2x-3} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-3} \cdot \frac{(x^2-2)((2x-3)^2-4)}{4(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(2x-5)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty \right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{2}) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$.

2. Решите уравнение $(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

Ответ: $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-4 \leq \cos x - 3 \cos 4x \leq 4$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 16. В то же время, правая часть уравнения не меньше 16. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16$ и $16 + \sin^2 3x = 16$, откуда $|\cos x - 3 \cos 4x| = 4$, $\sin 3x = 0$.

Из второго уравнения получаем $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой в первое уравнение¹ убеждаемся, что подходит только $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{19}{4}; \frac{17}{8} \right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2y} = u$, $x - 2y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = \frac{7}{2}, \\ u^2 v + u^2 = \frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{7}{2} - u, \\ u^2 \left(\frac{7}{2} - u \right) + u^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3 - 9u^2 + 27 = 0$. Подбирая целый корень $u = 3$ и выделяя множитель $(u - 3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u - 3)(2u^2 - 3u - 9) = 0$, откуда $u = 3$ или $u = -\frac{9}{2}$. Значение $u = -\frac{9}{2}$ не подходит. При $u = 3$ получаем $v = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{19}{2}, \\ 4y = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{4}, \\ y = \frac{17}{8}. \end{cases}$$

¹ Для этого рассматриваем 6 возможных случаев: $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = 2, CD = 1, DE = 3$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

Ответ: $R = 8\sqrt{\frac{3}{11}}, r = 5\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Поскольку C – середина хорды AE окружности Ω , то отрезок OC перпендикулярен AE . Опустим из точки Q перпендикуляр QH на прямую AE . Тогда $BH = HC = 1$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).

Пусть $OC = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как OC – средняя линия треугольника DHQ), $r = QB = \sqrt{QH^2 + BH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$, $R = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 9}$. Выразим двумя способами отрезок OQ . С одной стороны, так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов, т.е. $OQ = R - r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $CHQO$ получаем, что $OQ^2 = CH^2 + (QH - OC)^2 = 1 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 16}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 16 \Leftrightarrow \sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 7 - 2x^2$.

При условии $7 - 2x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $4x^4 + 5x^2 + 1 = 49 - 28x^2 + 4x^4$, $x^2 = \frac{16}{11}$. Тогда получаем, что $R = 8\sqrt{\frac{3}{11}}, r = 5\sqrt{\frac{3}{11}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 13122.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \dots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 9, a = 23 + 4\sqrt{15}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y + 9| + |x + 2| = 2$ и $x^2 + y^2 = 3$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-2; -9)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-2; -4)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{20} \pm \sqrt{3}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{20} - \sqrt{3}; \sqrt{20} + \sqrt{3})$ и ни одной общей точки при остальных R .

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, две общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных R .

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R , при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

- 1) $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к.

$3 < \sqrt{20} - \sqrt{3} < 7$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{20} - \sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{20} - \sqrt{3} < 3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{20} - \sqrt{3} < 3 < \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $7 > \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 3$ и $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда $a = 9$ и $a = 23 + 4\sqrt{15}$.

7. Дана правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны $B_1 D$ и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю $B_1 D$, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1 H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок $B_1 D$ и объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Ответ: а) 2 : 1, б) $B_1 D = 3(1 + \sqrt{13})$, $V = 108\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости $BDD_1 B_1$) плоскость α проходит через точку C – и, значит, через центр O грани $ABCD$. Отрезки $B_1 H$ и DF – проекции параллельных отрезков $B_1 D_1$ и DO на прямую $B_1 D$, причём $B_1 D_1 = 2DO$. Значит, $B_1 H : DF = 2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $AB = 2r = 6$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 6. Так как $B_1 D \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок HF , поэтому $HF = 6$.

Обозначим $B_1 D = d$. Поскольку $D_1 H$ – высота прямоугольного треугольника $B_1 D_1 D$, то $B_1 H \cdot B_1 D = B_1 D_1^2 = 72$ и, следовательно, $B_1 H = \frac{72}{d}$. Тогда $DF = \frac{1}{2} B_1 H = \frac{36}{d}$ и $HF = B_1 D - B_1 H - DF = d - \frac{72}{d} - \frac{36}{d}$. Получаем уравнение $6 = d - \frac{108}{d}$, откуда $d^2 - 6d - 108 = 0$, $d = 3 + 3\sqrt{13}$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна $h = \sqrt{B_1 D^2 - BD^2} = \sqrt{9(14 + 2\sqrt{13}) - 72} = 3\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V = AB^2 \cdot h = 108\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \left(\frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \right) \geq 1$.

Ответ: $x \in \left[\frac{7}{6}; \sqrt{3} \right) \cup \left[\frac{17}{6}; 3 \right) \cup (3; +\infty)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-3}{6x-12} > 0$, $\frac{x^2-3}{6x-12} \neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (2; +\infty)$, $x \neq 3$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-3}{6x-12} - 1 \right) \left(\frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} - \frac{x^2-3}{6x-12} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+9}{6x-12} \cdot \frac{(x^2-3)((6x-12)^2-25)}{25(6x-12)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(6x-17)(6x-7) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \left[\frac{7}{6}; \sqrt{3} \right) \cup \left[\frac{17}{6}; +\infty \right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x \in \left[\frac{7}{6}; \sqrt{3} \right) \cup \left[\frac{17}{6}; 3 \right) \cup (3; +\infty)$.

2. Решите уравнение $(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-3 \leq \cos x - 3 \cos 4x \leq 3$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 9. В то же время, правая часть уравнения не меньше 9. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9$ и $9 + \cos^2 5x = 9$, откуда $|\cos 2x - 2 \cos 4x| = 3$, $\cos 5x = 0$.

Из второго уравнения получаем $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой в первое уравнение² убеждаемся, что подходит только $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$

Ответ: $(-24; 72), \left(-\frac{4}{3}; 12 \right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{y-3x} = u$, $y + 3x = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = 12, \\ u^2 v + u^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 12 - u, \\ u^2(12 - u) + u^2 = 144. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 13u^2 + 144 = 0$. Подбирая целый корень $u = 4$ и выделяя множитель $(u - 4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u - 4)(u^2 - 9u - 36) = 0$, откуда $u = -3$, $u = 4$ или $u = 12$. Значение $u = -3$ не подходит. При $u = 4$ получаем $v = 8$. Тогда

$$\begin{cases} y - 3x = 16, \\ y + 3x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 24, \\ 6x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}, \\ y = 12. \end{cases}$$

При $u = 12$ получаем $v = 0$. Тогда

$$\begin{cases} y - 3x = 144, \\ y + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 144, \\ 6x = -144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -24, \\ y = 72. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$, Окружно-

² Для этого рассматриваем 5 возможных случаев: $x = \frac{\pi}{10} + k\pi$, $x = k\pi + \frac{3\pi}{10}$, $x = k\pi + \frac{5\pi}{10}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

сти Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

Ответ: $R = \frac{8}{\sqrt{19}}$, $r = \frac{11}{2\sqrt{19}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Опустим из точек O и Q перпендикуляры OH и QT на прямую AB , тогда точки H и T – середины хорд DE и BC соответственно (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам). Значит, $AT = 3$, $AH = 6$.

Пусть $QT = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как QT – средняя линия треугольника AQH), $r = QB = \sqrt{QT^2 + BT^2} = \sqrt{x^2 + 1}$,

$R = OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$. Выразим двумя способами отрезок OQ . С одной стороны, так как окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов, т.е. $OQ = R + r$. С

другой стороны, из прямоугольной трапеции $HTQO$ получаем, что $OQ^2 = TH^2 + (QT - OH)^2 = 9 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{x^2+9}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 7 - 4x^2$.

При условии $7 - 4x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4 + 20x^2 + 4 = 49 - 56x^2 + 16x^4$,

$x^2 = \frac{45}{76}$. Тогда получаем, что $R = \frac{8}{\sqrt{19}}$, $r = \frac{11}{2\sqrt{19}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 6$ или 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \dots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 3645$ способов.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y - 4| + |x + 12| - 3)(x^2 + y^2 - 12) = 0, \\ (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 16$, $a = 53 + 4\sqrt{123}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y - 4| + |x + 12| = 3$ и $x^2 + y^2 = 12$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-12; 4)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $2\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-5; 4)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{41} \pm 2\sqrt{3}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{41} - 2\sqrt{3}; \sqrt{41} + 2\sqrt{3})$ и ни одной общей точки при остальных R .

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 4$ или $R = 10$, две общие точки при $R \in (4; 10)$ и ни одной общей точки при остальных R .

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R , при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{41} + 2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $4 < \sqrt{41} + 2\sqrt{3} < 10$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{41} - 2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к.

$\sqrt{41} - 2\sqrt{3} < 4$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 4$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{41} - 2\sqrt{3} < 4 < \sqrt{41} + 2\sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 10$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $10 > \sqrt{41} + 2\sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 4$ и $R = \sqrt{41} + 2\sqrt{3}$. Тогда $a = 16$ и $a = 53 + 4\sqrt{123}$.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N , при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{1}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $L_1N = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$, $V = \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости LNN_1L_1) плоскость α проходит через точку M – и, значит, через центр O грани $KLMN$. Отрезки L_1B и AN – проекции параллельных отрезков L_1N_1 и NO на прямую L_1N , причём $L_1N_1 = 2NO$. Значит, $L_1B : AN = 2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $KN = 2r = 1$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 1. Так как $L_1N \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок AB , поэтому $AB = 1$.

Обозначим $L_1N = d$. Поскольку N_1B – высота прямоугольного треугольника L_1N_1N , то $L_1B \cdot L_1N = L_1N_1^2 = 2$ и, следовательно, $L_1B = \frac{2}{d}$. Тогда $AN = \frac{1}{2}L_1B = \frac{1}{d}$ и $AB = L_1N - L_1B - AN = d - \frac{2}{d} - \frac{1}{d}$. Получаем уравнение $1 = d - \frac{3}{d}$, откуда $d^2 - d - 3 = 0$, $d = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна $h = \sqrt{L_1N^2 - LN^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(14 + 2\sqrt{13}) - 2} = \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен

$$V = KL^2 \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}.$$

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}} \left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25} \right) \geq 1$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{5}) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty \right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-5}{2x-6} > 0$, $\frac{x^2-5}{2x-6} \neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$, $x \neq 1$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-5}{2x-6} - 1 \right) \left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25} - \frac{x^2-5}{2x-6} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-6} \cdot \frac{(x^2-5)((2x-6)^2-25)}{25(2x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(2x-11)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{5} \right] \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty \right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{5}) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty \right)$.

2. Решите уравнение $(\cos x + 2 \cos 6x)^2 = 9 + \sin^2 3x$.

Ответ: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-3 \leq \cos x + 2 \cos 6x \leq 3$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 9. В то же время, правая часть уравнения не меньше 9. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos x + 2 \cos 6x)^2 = 9$ и $9 + \sin^2 3x = 9$, откуда $|\cos x + 2 \cos 6x| = 3$, $\sin 3x = 0$.

Из второго уравнения получаем $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой в первое уравнение³ убеждаемся, что подходит только $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + \sqrt{2x+3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{17}{4}; \frac{5}{2} \right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y} = u$, $2x-3y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2v+u^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u, \\ u^2(5-u)+u^2=32. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 6u^2 + 32 = 0$. Подбирая целый корень $u = -2$ и выделяя множитель $(u+2)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)(u^2 - 8u + 16) = 0$, откуда $u = -2$ или $u = 4$. Значение $u = -2$ не подходит. При $u = 4$ получаем $v = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 2x+3y=16, \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=17, \\ 6y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{4}, \\ y=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = CD = 1$, $BC = DE = 2$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

Ответ: $R = \frac{27}{2\sqrt{19}}$, $r = \frac{8}{\sqrt{19}}$.

³ Для этого рассматриваем 6 возможных случаев: $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Поскольку C – середина хорды AE окружности Ω , то отрезок OC перпендикулярен OE . Опустим из точки Q перпендикуляр QH на прямую AE . Тогда $BH = HC = 1$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).

Пусть $OC = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как OC – средняя линия треугольника DHQ),
 $r = QB = \sqrt{QH^2 + BH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$, $R = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 9}$. Выразим двумя способами отрезок OQ . С одной стороны, так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов, т.е. $OQ = R - r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $CHQO$ получаем, что $OQ^2 = CH^2 + (QH - OC)^2 = 1 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 9}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 7 - 4x^2$.

При условии $7 - 4x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4 + 20x^2 + 4 = 49 - 56x^2 + 16x^4$,
 $x^2 = \frac{45}{76}$. Тогда получаем, что $R = \frac{27}{2\sqrt{19}}$, $r = \frac{8}{\sqrt{19}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 1458$ способов.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y - 10| + |x + 3| - 2)(x^2 + y^2 - 6) = 0, \\ (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 49$, $a = 40 - 4\sqrt{51}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y - 10| + |x + 3| = 2$ и $x^2 + y^2 = 6$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-3; 10)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{6}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-3; 5)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{34} \pm \sqrt{6}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{34} - \sqrt{6}; \sqrt{34} + \sqrt{6})$ и ни одной общей точки при остальных R .

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, две общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных R .

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R , при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{34} - \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6} < 7$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{34} + \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{34} + \sqrt{6} > 7$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{34} - \sqrt{6} < 7 < \sqrt{34} + \sqrt{6}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6}$),

т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 7$ и $R = \sqrt{34} - \sqrt{6}$. Тогда $a = 49$ и $a = 40 - 4\sqrt{51}$.

7. Дана правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны $B_1 D$ и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю $B_1 D$, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1 H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{3}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок $B_1 D$ и объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $B_1 D = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{13})$, $V = \frac{27}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости $BDD_1 B_1$) плоскость α проходит через точку C – и, значит, через центр O грани $ABCD$. Отрезки $B_1 H$ и DF – проекции параллельных отрезков $B_1 D_1$ и DO на прямую $B_1 D$, причём $B_1 D_1 = 2DO$. Значит, $B_1 H : DF = 2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $AB = 2r = 3$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 3. Так как $B_1 D \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок HF , поэтому $HF = 3$.

Обозначим $B_1 D = d$. Поскольку $D_1 H$ – высота прямоугольного треугольника $B_1 D_1 D$, то $B_1 H \cdot B_1 D = B_1 D_1^2 = 18$ и, следовательно, $B_1 H = \frac{18}{d}$. Тогда $DF = \frac{1}{2} B_1 H = \frac{9}{d}$ и $HF = B_1 D - B_1 H - DF = d - \frac{18}{d} - \frac{9}{d}$. Получаем уравнение $3 = d - \frac{27}{d}$, откуда $d^2 - 3d - 27 = 0$, $d = \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна $h = \sqrt{B_1 D^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{9}{4}(14 + 2\sqrt{13}) - 18} = \frac{3}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен

$$V = AB^2 \cdot h = \frac{27}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}.$$

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-6}{4x-10}} \left(\frac{(x^2-6)(4x-10)}{9} \right) \geq 1$.

Ответ: $x \in \left[\frac{7}{4}; 2 \right) \cup (2; \sqrt{6}) \cup \left[\frac{13}{4}; +\infty \right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-6}{4x-10} > 0$, $\frac{x^2-6}{4x-10} \neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6}) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty \right)$, $x \neq 2$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-6}{4x-10} - 1 \right) \left(\frac{(x^2-6)(4x-10)}{9} - \frac{x^2-6}{4x-10} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{4x-10} \cdot \frac{(x^2-6)(4x-10)^2-9}{9(4x-10)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(4x-13)(4x-7) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{6}] \cup \left[\frac{7}{4}; \sqrt{6} \right) \cup \left[\frac{13}{4}; +\infty \right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x \in \left[\frac{7}{4}; 2 \right) \cup (2; \sqrt{6}) \cup \left[\frac{13}{4}; +\infty \right)$.

2. Решите уравнение $(\cos 2x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \cos^2 5x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-4 \leq \cos 2x - 3 \cos 4x \leq 4$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 16. В то же время, правая часть уравнения не меньше 16. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos 2x - 3 \cos 4x)^2 = 16$ и $16 + \cos^2 5x = 16$, откуда $|\cos 2x - 3 \cos 4x| = 4$, $\cos 5x = 0$.

Из второго уравнения получаем $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой в первое уравнение⁴ убеждаемся, что подходит только $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + \sqrt{3x-y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$

Ответ: $(2; -3), (6; -18)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3x-y} = u$, $3x+y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=6, \\ u^2v+u^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u, \\ u^2(6-u)+u^2=36. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 7u^2 + 36 = 0$. Подбирая целый корень $u = -2$ и выделяя множитель $(u+4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)(u^2 - 9u + 18) = 0$, откуда $u = -2$, $u = 3$ или $u = 6$. Значение $u = -2$ не подходит. При $u = 3$ получаем $v = 3$. Тогда

$$\begin{cases} 3x-y=9, \\ 3x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-6, \\ 6x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-3. \end{cases}$$

При $u = 6$ получаем $v = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 3x-y=36, \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-36, \\ 6x=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=-18. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = 4$, $BC = DE = 2$, $CD = 3$, окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит че-

⁴ Для этого рассматриваем 5 возможных случаев: $x = \frac{\pi}{10} + k\pi$, $x = k\pi + \frac{3\pi}{10}$, $x = k\pi + \frac{5\pi}{10}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

рез точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

Ответ: $r = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{17}}$, $R = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Опустим из точек O и Q перпендикуляры OH и QT на прямую AB , тогда точки H и T – середины хорд DE и BC соответственно (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам). Значит, $AT = 5$, $AH = 10$.

Пусть $QT = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как QT – средняя линия треугольника AQH), $r = QB = \sqrt{QT^2 + BT^2} = \sqrt{x^2 + 1}$, $R = OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$. Выразим двумя способами отрезок OQ . С одной стороны, так как окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов, т.е. $OQ = R + r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $HTQO$ получаем, что $OQ^2 = TH^2 + (QT - OH)^2 = 25 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{x^2+25}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 25 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 23 - 4x^2$.

При условии $23 - 4x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4 + 20x^2 + 4 = 529 - 184x^2 + 16x^4$,

$x^2 = \frac{175}{68}$. Тогда получаем, что $r = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{17}}$, $R = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

5. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 26244.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 2, 4, 6 или 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 26244$ способов.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+2| + |x-11| - 3)(x^2 + y^2 - 13) = 0, \\ (x-5)^2 + (y+2)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 9$, $a = 42 + 2\sqrt{377}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+2| + |x-11| = 3$ и $x^2 + y^2 = 13$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(11; -2)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{13}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(5; -2)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{29} \pm \sqrt{13}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{29} - \sqrt{13}; \sqrt{29} + \sqrt{13})$ и ни одной общей точки при остальных R .

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 9$, две общие точки при $R \in (3; 9)$ и ни одной общей точки при остальных R .

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R , при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{29} + \sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3 < \sqrt{29} + \sqrt{13} < 9$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{29} - \sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к.

$\sqrt{29} - \sqrt{13} < 3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{29} - \sqrt{13} < 3 < \sqrt{29} + \sqrt{13}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 9$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $9 > \sqrt{29} + \sqrt{13}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 3$ и $R = \sqrt{29} + \sqrt{13}$. Тогда $a = 9$ и $a = 42 + 2\sqrt{377}$.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N , при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 2 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

Ответ: а) 2 : 1, б) $L_1N = 2(1 + \sqrt{13})$, $V = 32\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости LNN_1L_1) плоскость α проходит через точку M – и, значит, через центр O грани $KLMN$. Отрезки L_1B и AN – проекции параллельных отрезков L_1N_1 и NO на прямую L_1N , причём $L_1N_1 = 2NO$. Значит, $L_1B : AN = 2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $KN = 2r = 4$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 4. Так как $L_1N \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок AB , поэтому $AB = 4$.

Обозначим $L_1N = d$. Поскольку N_1B – высота прямоугольного треугольника L_1N_1N , то $L_1B \cdot L_1N = L_1N_1^2 = 32$ и, следовательно, $L_1B = \frac{32}{d}$. Тогда $AN = \frac{1}{2}L_1B = \frac{16}{d}$ и $AB = L_1N - L_1B - AN = d - \frac{32}{d} - \frac{16}{d}$. Получаем уравнение $4 = d - \frac{48}{d}$, откуда $d^2 - 4d - 48 = 0$, $d = 2(1 + \sqrt{13})$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна $h = \sqrt{L_1N^2 - LN^2} = \sqrt{4(14 + 2\sqrt{13}) - 32} = 2\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V = KL^2 \cdot h = 32\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(6) За каждый верно рассмотренный случай (“основание > 1 ”, “основание < 1 ”) 3 балла,
 – неэквивалентное преобразование неравенства 0 баллов за все последующие действия,
 – в ответ включено значение x , при котором основание логарифма равно 1 снять 1 балл,
 – в ответ включено значение x , при котором основание логарифма равно 0 снять 1 балл,
 – в ответ включены значения x , при которых основание логарифма отрицательно
 не более 3 баллов за задачу.
- 2.(6) Доказано, что минимум одной из частей уравнения равен максимуму другой 1 балл,
 – верно разобран только один из случаев знака выражения в скобках 1 балл,
- 3.(6) Сделана замена переменных (как в решении) 1 балл,
 – получено кубическое уравнение относительно одной из новых переменных 1 балл,
 – решено кубическое уравнение 2 балла,
 – получены посторонние решения снять 1 балл.
- 4.(8) Найдено отношение расстояний от центров окружностей до прямой AB 1 балл,
 – найдено отношение радиусов окружностей 4 балла.
- 5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа 1 балл,
 – за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) баллы не добавляются,
 – при решении перебором получен неверный ответ не более 1 балла за задачу,
 – ответ записан в виде $9^k \cdot 2$ и т.п. баллы не снимаются.
- 6.(8) Построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению 2 балла,
Сверх этого¹:
 – за каждое найденное значение параметра 3 балла,
 – получено 1 лишнее значение параметра снять 1 балл,
 – получено 2 лишних значения параметра снять 3 балла.
- 7.(8) – Найдено отношение отрезков пункта а) 2 балла,
 – указано, что расстояние между плоскостями равно диаметру сферы 1 балл,
 – найден отрезок пункта б) 3 балла,
 – найден объём призмы 2 балла.

¹ Если верно построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, то оценка за задачу не может быть менее 2 баллов.

1. Решите уравнение $\frac{2 \sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 5|\cos x|$.

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{\sin x} - \frac{(4 \cos^3 x - 3 \cos x)}{\cos x} = 5|\cos x| \Leftrightarrow 6 - 8 \sin^2 x - 4 \cos^2 x + 3 = 5|\cos x| \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 5|\cos x| + 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\cos x|$, получаем что $|\cos x| = 1$ или $|\cos x| = \frac{1}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\cos x| = 1$, то $\sin x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right), \left(\sqrt[4]{\frac{21}{76}}; 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{84}{19}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u, \sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0, v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 2v - u + 2 = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2) = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 1$ или $u = 2$.

Если $v = 1$, то $3 + u^4 = 84$, откуда $u = 3$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}, y = uv = 3$.

Если $u = 2$, то $3v^4 + 16v^4 = 84$, откуда $v = \sqrt[4]{\frac{84}{19}}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{\frac{21}{76}}, y = uv = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{84}{19}}$.

3. Решите неравенство $17^{\frac{5x-3}{3-x}} \cdot 2^{3-x} \leq 68$.

Ответ: $x \in [3 - 6 \log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 2, получаем:

$$\frac{5x-3}{3-x} \log_2 17 + (3-x) \leq 2 + \log_2 17 \Leftrightarrow \frac{6x-6}{3-x} \log_2 17 + (1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(6 \log_2 17 - 3 + x)}{3-x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in [3 - 6 \log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник CFM и касается его сторон CM и FM в точках P и K соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ с центром T описана около треугольника PKM .

а) Найдите OM .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника CFT к площади треугольника CFM равно $\frac{5}{8}$. Найдите длину биссектрисы MA треугольника CFM , а также его площадь.

Ответ: а) $OM = 5\sqrt{13}$, б) $MA = \frac{20\sqrt{13}}{3}, S = 204$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OKM и OPM прямые, т.е. из точек K и P отрезок OM виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OM как на диаметре, проходит также через точки K и P , значит, это окружность Ω . Отрезок

OM равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OM = 5\sqrt{13}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной CF через B , высоту треугольника, проведённую из вершины M , через MH . Пусть $\angle AMH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in MA$. Из треугольника POM находим, что $PM = \sqrt{OM^2 - OP^2} = 17$.

Поскольку у треугольников CFT и CFM общее основание CF , то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $TA:MA$. Отсюда получаем $\frac{5}{8} = \frac{TA}{MA} = \frac{MA - MT}{MA}$,

$$5MA = 8MA - 8MT, \quad MA = \frac{8}{3}MT = \frac{8}{3} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{2} = \frac{20\sqrt{13}}{3}, \quad AO = AM - OM = \frac{5\sqrt{13}}{3}.$$

Поскольку $OB \parallel AH$, $\angle AOB = \angle AMH = \gamma$; из треугольника AOB получаем, что $\cos \gamma = \frac{BO}{AO} = \frac{18}{5\sqrt{13}}$. Из треугольника AMH находим, что $MH = MA \cos \gamma = 24$.

Выразим площадь треугольника CMF двумя способами. С одной стороны, $S_{CMF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot MH = 12 \cdot CF$. С другой стороны, $S_{CMF} = pr$, где $r = 6$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $FB = FK$, $MK = MP$, $CB = CP$, получаем, что $p = FB + CB + MP = CF + MP = CF + 17$, $S_{CMF} = 6(CF + 17)$. Получаем уравнение $12 \cdot CF = 6(CF + 17)$, откуда $CF = 17$, $S_{CMF} = 12 \cdot CF = 204$.

5. В числе 2016***02** нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |16 + 6x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2, \\ (a + 15)y + 15x - a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $25\pi - 25 \arcsin 0,8 + 12$, б) $a = -20, a = -12$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 16 + 6x - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 6x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 \leq 25, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(3; 0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x \leq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2 \arcsin 0,8$, получаем, что его площадь S равна $25\pi - 25 \arcsin 0,8 + 12$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(y - 1) + 15x + 15y = 0$. Если подставить в него $y = 1$, то получим, что $x = -1$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $(-1; 1)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(0; 4)$ или точку $P(0; -4)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(0; 4) \rightarrow 4(a + 15) - a = 0 \Leftrightarrow a = -20.$$

$$P(0; -4) \rightarrow -4(a + 15) - a = 0 \Leftrightarrow a = -12.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром BC пересекает рёбра AC и AB соответственно в точках P и Q , отличных от вершин призмы. Отрезки B_1P и C_1Q пересекаются в точке T , и при этом $B_1P = 5$, $TQ = 2$.

а) Найдите угол TPA .

б) Найдите отношение $AP : CP$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC = 3$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90° , б) $2:1$, в) $V = 15$.

Решение. а) Точки P и Q лежат на окружности с диаметром BC ; значит, $\angle BPC = 90^\circ$, $\angle BQC = 90^\circ$ (т.е. BP и CQ – высоты треугольника ABC). Прямая BP – это проекция прямой TP на плоскость основания, при этом $BP \perp PA$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $TP \perp PA$, т.е. $\angle TPA = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые B_1P и C_1Q пересекаются, то все четыре точки B_1 , C_1 , P и Q лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые PQ и B_1C_1 лежат в одной плоскости α , а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $PQ \parallel B_1C_1$. Значит, $PQ \parallel BC$. Трапеция $PQBC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании BC равны, и поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$).

Треугольники B_1C_1T и PQT подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1Q и BB_1P следует, что $B_1P = C_1Q$, поэтому оба треугольника B_1C_1T и PQT равнобедренные с основаниями B_1C_1 и PQ соответственно. Значит, $PQ : BC = PQ : B_1C_1 = TQ : TC_1 = TQ : (QC_1 - TQ) = TQ : (B_1P - TQ) = 2 : 3$, откуда

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AC - AP}{AP} = \frac{AC}{AP} - 1 = \frac{BC}{PQ} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

в) Если $AC = 3$, то $CP = 1$, $AP = 2$, $AB = 3$; $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{5}$; $BB_1 = \sqrt{B_1P^2 - BP^2} = 2\sqrt{5}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$, объём призмы равен $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 15$.

1. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|$.

Ответ: $x = \pm \arcsin \frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{(3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{\sin x} - \frac{2(4 \cos^3 x - 3 \cos x)}{\cos x} = 5|\sin x| \Leftrightarrow 3 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 x + 6 = 5|\sin x| \Leftrightarrow 4 \sin^2 x - 5|\sin x| + 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\sin x|$, получаем что $|\sin x| = 1$ или $|\sin x| = \frac{1}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\sin x| = 1$, то $\cos x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arcsin \frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3; \frac{1}{3}\right), \left(\sqrt[4]{66}; \frac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = u, \sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0, v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 3v - 2u + 6 = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(u-3) = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = 3$.

Если $v = 2$, то $16 + 16u^4 = 82$, откуда $u = \frac{\sqrt[4]{66}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{4}{\sqrt[4]{66}}$, $x = uv = \sqrt[4]{66}$.

Если $u = 3$, то $v^4 + 81v^4 = 82$, откуда $v = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $x = uv = 3$.

3. Решите неравенство $5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75$.

Ответ: $x \in (-4; -3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 3, получаем:

$$\frac{x+5}{x+4} \log_3 5 + (x+4) \geq 1 + 2 \log_3 5 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x+4} \log_3 5 + (x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(-\log_3 5 + x+4)}{x+4} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in (-4; -3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{65}}{2}$ с центром T описана около треугольника PQM .

а) Найдите OQ .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $\frac{2}{3}$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ , а также его площадь.

Ответ: а) $OQ = \sqrt{65}$, б) $QA = \frac{3\sqrt{65}}{2}$, $S = 84$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OMQ и OPQ прямые, т.е. из точек M и P отрезок OQ виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная

на отрезке OQ как на диаметре, проходит также через точки M и P , значит, это окружность Ω . Отрезок OQ равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OQ = \sqrt{65}$.

- б) Обозначим точку касания окружности со стороной EF через B , высоту треугольника, проведённую из вершины Q , через QH . Пусть $\angle AQH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in QA$. Из треугольника POQ находим, что $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = 7$.

Поскольку у треугольников EFT и EFQ общее основание EF , то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $TA:QA$. Отсюда получаем $\frac{2}{3} = \frac{TA}{QA} = \frac{QA - QT}{QA}$,

$$2QA = 3QA - 3QT, \quad QA = 3QT = 3 \cdot \frac{\sqrt{65}}{2} = \frac{3\sqrt{65}}{2}, \quad AO = AQ - OQ = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

Поскольку $OB \parallel QH$, $\angle AOB = \angle AQH = \gamma$; из треугольника AOB получаем, что $\cos \gamma = \frac{BO}{AO} = \frac{8}{\sqrt{65}}$. Из треугольника AQH находим, что $QH = QA \cos \gamma = 12$.

Выразим площадь треугольника EFQ двумя способами. С одной стороны, $S_{EFQ} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot QH = 6 \cdot EF$. С другой стороны, $S_{EFQ} = pr$, где $r = 4$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $FB = FM$, $MQ = QP$, $BE = EP$, получаем, что $p = FB + BE + PQ = EF + PQ = EF + 7$, $S_{EFQ} = 4(EF + 7)$. Получаем уравнение $6 \cdot EF = 4(EF + 7)$, откуда $EF = 14$, $S_{CMF} = 6 \cdot EF = 84$.

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2160.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6, 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2160$ способов.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $25\pi - 25 \arcsin 0,6 + 12$, б) $a = -6, a = -3$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9 + 8y - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 8y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 4)^2 + x^2 \leq 25, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(0; 4)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y \geq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y \leq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2 \arcsin 0,6$, получаем, что его площадь S равна $25\pi - 25 \arcsin 0,6 + 12$.

- б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(x + 1) + 4x - 13y = 0$. Если подставить в него $x = -1$, то получим, что $y = -\frac{4}{13}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через

точку $\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(3; 0)$ или точку $P(-3; 0)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$\begin{aligned} M(3; 0) &\rightarrow 3(a+4) + a = 0 \Leftrightarrow a = -3. \\ P(-3; 0) &\rightarrow -3(a+4) + a = 0 \Leftrightarrow a = -6. \end{aligned}$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N , отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P , и при этом $A_1N = 7$, $C_1P = 6$.

а) Найдите угол PFA .

б) Найдите отношение $AF : FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB = 6$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90° , б) $5:1$, в) $V = 21\sqrt{10}$.

Решение. а) Точки F и N лежат на окружности с диаметром AC ; значит, $\angle AFC = 90^\circ$, $\angle ANC = 90^\circ$ (т.е. AN и CF – высоты треугольника ABC). Прямая CF – это проекция прямой C_1F на плоскость основания, при этом $CF \perp AB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $C_1F \perp AB$, т.е. $\angle PFA = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые C_1F и A_1N пересекаются, то все четыре точки A_1 , C_1 , F и N лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые FN и A_1C_1 лежат в одной плоскости α , а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $FN \parallel A_1C_1$. Значит, $FN \parallel AC$. Трапеция $AFNC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании AC равны, и поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$).

Треугольники A_1C_1P и FNP подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1F и AA_1N следует, что $A_1N = C_1F$, поэтому оба треугольника A_1C_1P и FNP равнобедренные с основаниями A_1C_1 и FN соответственно. Значит, $FN : AC = FN : A_1C_1 = FP : PC_1 = (FC_1 - PC_1) : PC_1 = (NA_1 - PC_1) : PC_1 = 1 : 6$, откуда

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AB - BF}{BF} = \frac{AB}{BF} - 1 = \frac{AC}{FN} - 1 = 6 - 1 = 5.$$

в) Если $AB = 6$, то $BF = 1$, $AF = 5$, $BC = 6$; $CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{35}$; $CC_1 = \sqrt{C_1F^2 - CF^2} = \sqrt{14}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{14}$, объём призмы равен $V = S_{ABC} \cdot CC_1 = 21\sqrt{10}$.

1. Решите уравнение $\frac{3 \sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 7|\cos x|$.

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{3(3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{\sin x} - \frac{2(4 \cos^3 x - 3 \cos x)}{\cos x} = 7|\cos x| \Leftrightarrow 9 - 12 \sin^2 x - 8 \cos^2 x + 6 = 7|\cos x| \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 7|\cos x| + 3 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\cos x|$, получаем что $|\cos x| = 1$ или $|\cos x| = \frac{3}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\cos x| = 1$, то $\sin x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{xy} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0, \\ 2x^2 + x^2 y^4 = 18y^2. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2), \left(\frac{\sqrt[4]{286}}{4}; \sqrt[4]{286}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = u, \sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0, v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 2uv - v - 4u + 2 = 0, \\ 2u^2 v^2 + \frac{v^6}{u^2} = \frac{18v^2}{u^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(2u-1) = 0, \\ v^4 + 2u^4 = 18. \end{cases} \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = \frac{1}{2}$.

Если $v = 2$, то $16 + 2u^4 = 18$, откуда $u = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = 2, x = uv = 2$.

Если $u = \frac{1}{2}$, то $v^4 + \frac{1}{8} = 18$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{286}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{286}, x = uv = \frac{\sqrt[4]{286}}{4}$.

3. Решите неравенство $11^{\frac{3x-4}{4-x}} \cdot 3^{4-x} \leq 99$.

Ответ: $x \in [4 - 4 \log_3 11; 2] \cup (4; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 3, получаем:

$$\frac{3x-4}{4-x} \log_3 11 + (4-x) \leq 2 + \log_3 11 \Leftrightarrow \frac{4x-8}{4-x} \log_3 11 + (2-x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(4 \log_3 11 - 4 + x)}{4-x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in [4 - 4 \log_3 11; 2] \cup (4; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 8 с центром O вписана в остроугольный треугольник ENT и касается его сторон EN и NT в точках C и A соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{145}}{2}$ с центром B описана около треугольника ACN .

а) Найдите ON .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника BTE к площади треугольника ENT равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы NL треугольника ENT , а также его площадь.

Ответ: а) $ON = \sqrt{145}$, б) $NL = \frac{5\sqrt{145}}{3}, S = 360$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OCN и OAN

прямые, т.е. из точек A и C отрезок ON виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке ON как на диаметре, проходит также через точки A и C , значит, это окружность Ω . Отрезок ON равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $ON = \sqrt{145}$.

- б) Обозначим точку касания окружности со стороной ET через F , высоту треугольника, проведённую из вершины N , через NH . Пусть $\angle LNH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in NL$. Из треугольника CNO находим, что $CN = \sqrt{ON^2 - OC^2} = 9$.

Поскольку у треугольников BTE и ENT общее основание ET , то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $NL:BL$. Отсюда получаем $\frac{7}{10} = \frac{BL}{NL} = \frac{NL - BN}{NL}$,

$$7NL = 10NL - 10BN, \quad NL = \frac{10}{3}BN = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{145}}{2} = \frac{5\sqrt{145}}{3}, \quad LO = NL - ON = \frac{2\sqrt{145}}{3}.$$

Поскольку $OF \parallel NH$, $\angle LOF = \angle LNH = \gamma$; из треугольника LOF получаем, что $\cos \gamma = \frac{FO}{LO} = \frac{12}{\sqrt{145}}$. Из треугольника NLH находим, что $NH = NL \cos \gamma = 20$.

Выразим площадь треугольника ENT двумя способами. С одной стороны, $S_{ENT} = \frac{1}{2} \cdot ET \cdot NH = 10 \cdot ET$. С другой стороны, $S_{ENT} = pr$, где $r = 8$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $TF = TA$, $EF = EC$, $NC = NA$, получаем, что $p = TF + EF + CN = ET + CN = ET + 9$, $S_{ENT} = 8(ET + 9)$. Получаем уравнение $10 \cdot ET = 8(ET + 9)$, откуда $ET = 36$, $S_{CMF} = 10 \cdot ET = 360$.

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 864.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 864$ способа.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |9 - x^2 - y^2 - 2y| + |-2y| = 9 - x^2 - y^2 - 4y, \\ 15y + 3a = (4a + 15)x. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $S = 10\pi + 3 - 10 \arctg 3$, б) $a = -5$, $a = -3$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 - 2y \geq 0, \\ -2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 + x^2 \leq 10, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром $(0; -1)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y \leq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y \geq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2 \arctg 3$, получаем, что его площадь S равна $10\pi + 3 - 10 \arctg 3$.

- б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(4x - 3) + 15x - 15y = 0$. Если подставить в него $x = \frac{3}{4}$, то получим, что $y = \frac{3}{4}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через

точку $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(3; 0)$ или точку $P(-3; 0)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(3; 0) \rightarrow 3a = 3(4a + 15) \Leftrightarrow a = -5.$$

$$P(-3; 0) \rightarrow 3a = -3(4a + 15) \Leftrightarrow a = -3.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1C_1 пересекает рёбра B_1C_1 и A_1B_1 соответственно в точках N_1 и K_1 , отличных от вершин призмы. Отрезки AN_1 и CK_1 пересекаются в точке F , и при этом $AN_1 = 7$, $CF = 4$.

а) Найдите угол FN_1B_1 .

б) Найдите отношение $C_1N_1 : N_1B_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $BC = 8$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90° , б) $1:3$, в) $V = 56\sqrt{3}$.

Решение. а) Точки K_1 и N_1 лежат на окружности с диаметром A_1C_1 ; значит, $\angle A_1K_1C_1 = 90^\circ$, $\angle A_1N_1C_1 = 90^\circ$ (т.е. A_1N_1 и C_1K_1 – высоты треугольника $A_1B_1C_1$). Прямая A_1N_1 – это проекция прямой AN_1 на плоскость основания, при этом $A_1N_1 \perp B_1C_1$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AN_1 \perp B_1C_1$, т.е. $\angle FN_1B_1 = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые AN_1 и CK_1 пересекаются, то все четыре точки N_1 , K_1 , A и C лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые AC и K_1N_1 лежат в одной плоскости α , а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $AC \parallel K_1N_1$. Значит, $K_1N_1 \parallel A_1C_1$. Трапеция $A_1K_1N_1C_1$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании A_1C_1 равны, и поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный ($A_1B_1 = B_1C_1$).

Треугольники K_1N_1F и ACF подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1K_1 и AA_1N_1 следует, что $AN_1 = CK_1$, поэтому оба треугольника K_1N_1F и ACF равнобедренные с основаниями K_1N_1 и AC соответственно. Значит, $K_1N_1 : A_1C_1 = K_1N_1 : AC = K_1F : CF = (K_1C - CF) : CF = (AN_1 - CF) : CF = 3 : 4$, откуда

$$\frac{C_1N_1}{N_1B_1} = \frac{C_1B_1 - N_1B_1}{N_1B_1} = \frac{C_1B_1}{N_1B_1} - 1 = \frac{A_1C_1}{N_1K_1} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

в) Если $BC = 8$, то $C_1N_1 = 2$, $B_1N_1 = 6$, $A_1B_1 = 8$; $A_1N_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1N_1^2} = 2\sqrt{7}$; $AA_1 = \sqrt{AN_1^2 - A_1N_1^2} = \sqrt{21}$.

Значит, площадь основания призмы равна $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{7}$, объём призмы равен $V = S_{A_1B_1C_1} \cdot AA_1 = 56\sqrt{3}$.

1. Решите уравнение $\frac{2 \sin 3x}{\sin x} - \frac{3 \cos 3x}{\cos x} = 7|\sin x|$.

Ответ: $x = \pm \arcsin \frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{\sin x} - \frac{3(4 \cos^3 x - 3 \cos x)}{\cos x} = 7|\sin x| \Leftrightarrow 6 - 8 \sin^2 x - 12 \cos^2 x + 9 = 7|\sin x| \Leftrightarrow 4 \sin^2 x - 7|\sin x| + 3 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\sin x|$, получаем что $|\sin x| = 1$ или $|\sin x| = \frac{3}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\sin x| = 1$, то $\cos x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arcsin \frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt[4]{31}}{12}; \frac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u, \sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0, v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 3uv - u - 6v + 2 = 0, \\ \frac{v^2}{u^2} + 81v^6u^2 = 2u^2v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2)(3v-1) = 0, \\ 1 + 81v^4u^4 = 2u^4. \end{cases} \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u = 2$ или $v = \frac{1}{3}$.

Если $u = 2$, то $1 + 81 \cdot 16v^4 = 32$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{31}}{6}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt[4]{31}}{12}, y = uv = \frac{\sqrt[4]{31}}{3}$.

Если $v = \frac{1}{3}$, то $1 + u^4 = 2u^4$, откуда $u = 1$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}, y = uv = \frac{1}{3}$.

3. Решите неравенство $2^{\frac{1-x}{3+x}} \cdot 7^{3+x} \geq 56$.

Ответ: $x \in (-3; -2] \cup [4 \log_7 2 - 3; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 7, получаем:

$$\frac{1-x}{3+x} \log_7 2 + (3+x) \geq 1 + 3 \log_7 2 \Leftrightarrow \frac{-4x-8}{3+x} \log_7 2 + (2+x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(-4 \log_7 2 + 3+x)}{3+x} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in (-3; -2] \cup [4 \log_7 2 - 3; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник ABC и касается его сторон AB и BC в точках F и T соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{85}}{2}$ с центром M описана около треугольника BFT .

а) Найдите BO .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника ACM к площади треугольника ABC равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы BQ треугольника ABC , а также его площадь.

Ответ: а) $BO = \sqrt{85}$, б) $BQ = \frac{5\sqrt{85}}{3}, S = 210$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OFB и OTB прямые, т.е. из точек F и T отрезок OB виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OB как на диаметре, проходит также через точки F и T , значит, это окружность Ω . Отрезок OB

равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OB = \sqrt{85}$.

- б) Обозначим точку касания окружности со стороной AC через L , высоту треугольника, проведённую из вершины B , через BH . Пусть $\angle QBH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in BQ$. Из треугольника BOT находим, что $BT = \sqrt{OB^2 - OT^2} = 7$.

Поскольку у треугольников AMC и ABC общее основание AC , то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $MQ : BQ$. Отсюда получаем $\frac{7}{10} = \frac{MQ}{BQ} = \frac{BQ - BM}{BQ}$,

$$7BQ = 10BQ - 10BM, \quad BQ = \frac{10}{3}BM = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{85}}{2} = \frac{5\sqrt{85}}{3}, \quad OQ = BQ - OB = \frac{2\sqrt{85}}{3}.$$

Поскольку $OL \parallel BH$, $\angle LOQ = \angle HBQ = \gamma$; из треугольника LOQ получаем, что $\cos \gamma = \frac{LO}{OQ} = \frac{9}{\sqrt{85}}$. Из треугольника

BQH находим, что $BH = BQ \cos \gamma = 15$.

Выразим площадь треугольника ABC двумя способами. С одной стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{15}{2} \cdot AC$. С другой стороны, $S_{ABC} = pr$, где $r = 6$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $AF = AL$, $BF = BT$, $CL = CT$, получаем, что $p = AL + LC + BT = AC + BT = AC + 7$, $S_{ABC} = 6(AC + 7)$. Получаем уравнение $7,5 \cdot AC = 6(AC + 7)$, откуда $AC = 28$, $S_{ABC} = 7,5 \cdot AC = 210$.

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1728$ способов.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |4 - 2x - x^2 - y^2| + |-2x| = 4 - 4x - x^2 - y^2, \\ (3a + 15)x = 3y + a + 4. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $S = 5\pi - 5 \arctg 2 + 2$, б) $a = -10$, $a = 2$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4 - 2x - x^2 - y^2 \geq 0, \\ -2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq 5, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(-1; 0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x \leq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x \geq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2 \arctg 2$, получаем, что его площадь S равна $5\pi - 5 \arctg 2 + 2$.

- б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(3x - 1) + 15x - 3y - 4 = 0$. Если подставить в него $x = \frac{1}{3}$, то получим, что $y = \frac{1}{3}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через

точку $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(0; 2)$ или точку $P(0; -2)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(0; 2) \rightarrow 0 = 6 + a + 4 \Leftrightarrow a = -10.$$

$$P(0; -2) \rightarrow 0 = -6 + a + 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1B_1 пересекает рёбра A_1C_1 и B_1C_1 соответственно в точках T_1 и L_1 , отличных от вершин призмы. Отрезки BT_1 и AL_1 пересекаются в точке S , и при этом $AL_1 = 7$, $ST_1 = 2$.

а) Найдите угол ST_1A_1 .

б) Найдите отношение $A_1T_1 : T_1C_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC = 5$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90° , б) $3:2$, в) $V = 35\sqrt{3}$.

Решение. а) Точки T_1 и L_1 лежат на окружности с диаметром A_1B_1 ; значит, $\angle A_1L_1B_1 = 90^\circ$, $\angle A_1T_1B_1 = 90^\circ$ (т.е. A_1L_1 и B_1T_1 – высоты треугольника $A_1B_1C_1$). Прямая B_1T_1 – это проекция прямой BT_1 на плоскость основания, при этом $B_1T_1 \perp A_1C_1$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BT_1 \perp A_1C_1$, т.е. $\angle ST_1A_1 = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые BT_1 и AL_1 пересекаются, то все четыре точки T_1 , L_1 , A и B лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые AB и T_1L_1 лежат в одной плоскости α , а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $AB \parallel T_1L_1$. Значит, $T_1L_1 \parallel A_1B_1$. Трапеция $A_1T_1L_1B_1$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании A_1B_1 равны, и поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный ($A_1C_1 = B_1C_1$).

Треугольники T_1L_1S и ABS подобны по двум углам. Из равенства треугольников BB_1T_1 и AA_1L_1 следует, что $AL_1 = BT_1$, поэтому оба треугольника T_1L_1S и ABS равнобедренные с основаниями T_1L_1 и AB соответственно. Значит, $T_1L_1 : A_1B_1 = T_1L_1 : AB = T_1S : SB = T_1S : (T_1B - T_1S) = T_1S : (AL_1 - T_1S) = 2 : 5$, откуда

$$\frac{A_1T_1}{T_1C_1} = \frac{C_1A_1 - T_1C_1}{T_1C_1} = \frac{C_1A_1}{T_1C_1} - 1 = \frac{A_1B_1}{T_1L_1} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

в) Если $AC = 5$, то $C_1T_1 = 2$, $A_1T_1 = 3$, $B_1C_1 = 5$; $B_1T_1 = \sqrt{B_1C_1^2 - C_1T_1^2} = \sqrt{21}$; $BB_1 = \sqrt{BT_1^2 - B_1T_1^2} = 2\sqrt{7}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{21}$, объём призмы равен $V = S_{A_1B_1C_1} \cdot BB_1 = 35\sqrt{3}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(6) Получено уравнению относительно $\sin x$ ($\cos x$) 2 балла,
 – за каждый случай раскрытия модуля 2 балла,
 – не сделан (неверно сделан отбор), возникающий за счёт разбора случаев при раскрытии модуля **снять 2 балла**,
 – не учтено ОДЗ (нули знаменателя) **снять 1 балл**.
- 2.(6) Первое уравнение разложено на множители 2 балла,
 – за каждый из двух полученных случаев 2 балла.
- 3.(6) Неэквивалентное преобразование неравенства **0 баллов за все последующие действия**,
 – неравенство сведено к дробно-рациональному 2 балла,
 – неравенство преобразовано к виду $\frac{P(x)Q(x)}{R(x)} \geq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – линейные функции переменной x (или к виду $\frac{G(x)}{R(x)} \geq 0$, где $R(x)$ – линейная функция, $G(x)$ – квадратичная функция и при этом найдены нули $G(x)$) 2 балла,
 – границы промежутков указаны в ответе в неупрощённой форме **снять 1 балл**,
 – точки расположены на числовой прямой в неправильном порядке **снять 1 балл**,
 – угадано целое значение x , при котором неравенство обращается в равенство ... **баллы не добавляются**.
- 4.(8) Решён пункт а) 2 балла,
 – за каждый из вопросов пункта б) (биссектриса, площадь) 3 балла.
- 5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа 1 балл,
 – за формулировки признаков делимости на 6 (на 15) **баллы не добавляются**,
 – при решении перебором получен неверный ответ **не более 1 балла за задачу**,
 – ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. **баллы не снимаются**.
- 6.(8) а) (4) Построено множество 3 балла,
 – найдена его площадь 1 балл.
- б) (4) установлено, что все прямые, заданные вторым уравнением системы, проходят через одну точку 2 балла,
 – за каждое найденное значение параметра **по 1 баллу**;
при ином способе решения:
 – указаны необходимые условия того, что прямая и сегмент имеют ровно одну общую точку (касание или прямая проходит через “вершину” сегмента) 1 балл,
 – показано, что касательных нет 1 балл,
 – найдены значения параметра, при которых прямая проходит через “вершины” сегмента 1 балл,
 – проверено, что эти прямые не имеют общих точек с окружностью 1 балл.
- 7.(8) Показано, что отрезок, соединяющий точки пересечения сферы с рёбрами параллелен данному диаметру сферы 2 балла,
 – доказано, что в основании призмы лежит равнобедренный треугольник (или эквивалентное утверждение) 1 балл,
 – найден угол пункта а) 1 балл,
 – найдено отношение пункта б) 2 балла,
 – найден объём призмы 2 балла.

1. Решите неравенство $(x^2 - 3x + 3)^{4x^3 + 5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3 + 18x}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}$.

Решение. Основание степени положительно при всех x , поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$(x^2 - 3x + 3)^{(4x^3 + 5x^2) - (2x^3 + 18x)} \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)x(2x^2 + 5x - 18) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 x(2x+9) \leq 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}$.

2. Решите уравнение $\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|$.

Ответ: $x = -\arccos \frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2k\pi$, $x = -\arccos \frac{1-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2 \sin x \sin 6x}{2 \sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{\sin x \cos 3x}{\cos x} = 2|\sin x \cos x| \Leftrightarrow \sin x(4 \cos^2 x - 3) = 2|\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \geq 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\sin x(4 \cos^2 x - 3) = 2 \sin x \cos x$, откуда либо $\sin x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$. Следовательно, $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}$ не имеет реше-

ний, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\cos x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем

$$x = -\arccos \frac{1 - \sqrt{13}}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\sin x(4 \cos^2 x - 3) = -2 \sin x \cos x$, откуда $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$. Следовательно, $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение

$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения

$$\cos x = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}, \text{ учитывая ограничение, получаем } x = -\arccos \frac{\sqrt{13} - 1}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) - 2(x+y) + 10 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 2(x^2 - y^2) - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-2)(x+y) = -10, \\ (xy-2)(x-y)(x+y) = 30. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -3$, откуда $y = x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $(x^2 + 3x - 2)(2x + 3) = -10$, $2x^3 + 9x^2 + 5x + 4 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение $-x = -4$. Выделив множитель $(x + 4)$, получаем $(x + 4)(2x^2 + x + 1) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -4$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-4; -1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M . Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE . Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC , угол CBD и площадь треугольника ABC .

Ответ: $AH = 12$, $\angle CBD = 30^\circ$, $S_{ABC} = 24\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , точку касания прямой DE с окружностью через T , а радиус окружности через R . Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины,

$DM = \frac{1}{2} BM = R$, $CE = \frac{3}{2} CM = 6$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ODT катет $OT = R$, а гипотенуза $OD = 2R$. Следовательно, $\angle TDO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника ABC , поэтому $DE \parallel BC$, $\angle MBC = \angle MDE = 30^\circ$. Из треугольника BMC находим, что $BC = MC \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$.

Высота AH исходного треугольника вдвое больше, чем CE (т.к. CE – средняя линия треугольника ABH). Значит, $AH = 12$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2} BC \cdot AH = 24\sqrt{3}$.

5. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2592$ способа.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 60, б) $a = -36, a = 32$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 15x \geq 0, \\ 8y \geq 0, \\ 120 - 15x - 8y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 15x + 8y \leq 120. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(8; 0)$, $G(0; 15)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 60.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -2$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN . Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$4 \cos \frac{a\pi}{2} = 4, \quad \left(\frac{a+2}{4}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -36$ и $a = 32$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \sqrt{\frac{35}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка AK .

Ответ: $V = 420\sqrt{3}$, $AK = 8$ или $AK = 4$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r . Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3} = 2\sqrt{35}$, площадь осно-

вания $S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{35})^2 = 35\sqrt{3}$, объём призмы равен $Sh = 35\sqrt{3} \cdot 12 = 420\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость LAC также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями LAC и LA_1C_1 лежат на отрезках LQ и LQ_1 , где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1 .

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q . Обозначим центр окружности ω , получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O , а точки касания отрезков LQ_1 , LQ и QQ_1 с окружностью – G , P и J соответственно. Высота LH треугольника LQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $LH = 3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника LQQ_1 двумя способами: $S_0 = pr$ и $S_0 = \frac{1}{2} LH \cdot QQ_1 = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 12 = 18r$, где p – полупериметр треугольника LQQ_1 . Следовательно, $p = 18$. Обозначим $QJ = x$; тогда $Q_1G = Q_1J = 12 - x$, $PQ = x$, $LG = LP = \frac{1}{2}(36 - 2x - 2(12 - x)) = 6$.

Значит, $QQ_1 = 12$, $QL = 6 + x$, $Q_1L = 18 - x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0 = \sqrt{18 \cdot 6 \cdot x \cdot (12 - x)}$, откуда $\sqrt{18 \cdot 6 \cdot x \cdot (12 - x)} = 18r$, $x(12 - x) = 3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2 - 12x + 35 = 0$, следовательно, $x = 5$ или $x = 7$.

Тогда $QL = 13$ или $QL = 11$, а так как $BL = \sqrt{QL^2 - BQ^2} = \sqrt{QL^2 - 9r^2}$, то $BL = 4$ или $BL = 8$. Остаётся заметить, что $AK = BL = QH$.

1. Решите неравенство $(x^2 - x + 1)^{16x^3 - 6x} \leq (x^2 - x + 1)^{13x^2 + x^3}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$.

Решение. Основание степени положительно при всех x , поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$(x^2 - x)(16x^3 - 6x) - (13x^2 + x^3) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)x^2(15x^2 - 13x - 6) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)x^2(5x-6)(3x+1) \leq 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x - \sin 2x} = -3 \cdot |\sin 2x|$

Ответ: $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{57} - 3}{8} + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin \frac{3 - \sqrt{57}}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2 \cos x \sin 6x}{2 \sin x \cos 3x} = -3|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2 \cos x \sin 3x \cos 3x}{\sin x \cos 3x} = -3|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{\cos x \sin 3x}{\sin x} = -3|\sin x \cos x| \Leftrightarrow \cos x(3 - 4 \sin^2 x) = -3|\sin x \cos x|$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \geq 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\cos x(3 - 4 \sin^2 x) = -3 \sin x \cos x$, откуда либо $\cos x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4 \sin^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{8}$. Уравнение $\sin x = \frac{3 + \sqrt{57}}{8}$ не имеет реше-

ний, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{3 - \sqrt{57}}{8}$, учитывая ограничение, получаем

$$x = \pi - \arcsin \frac{3 - \sqrt{57}}{8} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\cos x(3 - 4 \sin^2 x) = 3 \sin x \cos x$, откуда $4 \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{8}$. Уравнение

$\sin x = \frac{-3 - \sqrt{57}}{8}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения

$$\sin x = \frac{\sqrt{57} - 3}{8}, \text{ учитывая ограничение, получаем } x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{57} - 3}{8} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 3(x-y) + 1 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 3(x^2 - y^2) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)(x-y) = -1, \\ (xy-3)(x-y)(x+y) = -3. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 3$, откуда $y = -x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $(-x^2 + 3x - 3)(2x - 3) = -1$, $2x^3 - 9x^2 + 15x - 10 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения $-x = 2$. Выделив множитель $(x - 2)$, получаем $(x - 2)(2x^2 - 5x + 5) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 2$. Тогда $y = 1$, и пара чисел (2; 1) является единственным решением системы.

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке G . Окружность, построенная на отрезке LG как на диаметре, проходит через вершину M и касается прямой DE . Известно, что $GM = 6$. Найдите высоту KT треугольника KLM , угол LGM и площадь треугольника KLM .

Ответ: $KT = 18$, $\angle LGM = 60^\circ$, $S_{KLM} = 54\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , точку касания прямой DE с окружностью через S , а радиус

окружности через R . Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины, $DG = \frac{1}{2}LG = R$, $ME = \frac{3}{2}GM = 9$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ODS катет $OS = R$, а гипотенуза $OD = 2R$. Следовательно, $\angle SDO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника KLM , поэтому $DE \parallel LM$, $\angle GLM = \angle GDE = 30^\circ$. Из треугольника GLM находим, что $LM = MG \operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}$, $\angle LGM = 60^\circ$.

Высота KT исходного треугольника вдвое больше, чем ME (т.к. ME – средняя линия треугольника KLT). Значит, $KT = 18$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}KT \cdot LM = 54\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1296.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 4 или 8 (3 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1296$ способов.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48, \\ (x - 8)^2 + \left(y + 6 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 = (a + 4)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 96; б) $a = 6, a = -14$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x \geq 0, \\ 4y \geq 0, \\ 48 - 3x - 4y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 3x + 4y \leq 48. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(16; 0)$, $G(0; 12)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 96.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -4$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN . Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$-6 \cos \frac{a\pi}{2} = 6, \quad (a + 4)^2 = 10^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -14$ и $a = 6$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6. Сфера Ω радиуса $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки M и K такие, что $KM \parallel AB$, а плоскости ACK и MB_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка BK .

Ответ: $V = 48\sqrt{3}$, $BK = 5$ или $BK = 1$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r . Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3} = 4\sqrt{2}$, площадь осно-

вания $S = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$, объём призмы равен $Sh = 8\sqrt{3} \cdot 6 = 48\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость A_1C_1K также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями ACK и A_1C_1K лежат на отрезках KQ и KQ_1 , где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1 .

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q . Обозначим центр окружности ω , получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O , а точки касания отрезков KQ_1 , QQ_1 и KQ с окружностью – G , J и P соответственно. Высота KH треугольника KQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $KH = 3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника KQQ_1 двумя способами: $S_0 = pr$ и $S_0 = \frac{1}{2}KH \cdot QQ_1 = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 6 = 9r$, где p – полупериметр треугольника KQQ_1 . Следовательно, $p = 9$. Обозначим $QJ = x$; тогда $Q_1G = Q_1J = 6 - x$, $PQ = x$, $KG = KP = \frac{1}{2}(18 - 2x - 2(6 - x)) = 3$.

Значит, $QQ_1 = 6$, $QK = 3 + x$, $Q_1K = 9 - x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0 = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot x \cdot (6 - x)}$, откуда $\sqrt{9 \cdot 3 \cdot x \cdot (6 - x)} = 9r$, $x(6 - x) = 3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$, следовательно, $x = 2$ или $x = 4$.

Тогда $QK = 7$ или $QK = 5$, а так как $BK = \sqrt{QK^2 - BQ^2} = \sqrt{QK^2 - 9r^2}$, то $BK = 5$ или $BK = 1$.

1. Решите неравенство $(x^2 + 3x + 3)^{5x^3 - 3x^2} \leq (x^2 + 3x + 3)^{3x^3 + 5x}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

Решение. Основание степени положительно при всех x , поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$(x^2 + 3x + 3)^{(5x^3 - 3x^2) - (3x^3 + 5x)} \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)x(2x^2 - 3x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1)^2 x(2x - 5) \leq 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = -4 \cdot |\sin 2x|$.

Ответ: $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2 \cos x \sin 6x}{2 \sin 3x \cos x} = -4 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x} = -4 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \cos 3x = -4 \cdot |\sin x \cos x| \Leftrightarrow \cos x(4 \cos^2 x - 3) = -4 \cdot |\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \geq 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\cos x(4 \cos^2 x - 3) = -4 \sin x \cos x$, откуда либо $\cos x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4 \cos^2 x - 3 = -4 \sin x$, $4 \sin^2 x - 4 \sin x - 1 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\cos x(4 \cos^2 x - 3) = 4 \sin x \cos x$, откуда $4 \sin^2 x + 4 \sin x - 1 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3 y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-3; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x + y) + 3(x + y) + 24 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) + 3(x^2 - y^2) - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy + 3)(x + y) = -24, \\ (xy + 3)(x - y)(x + y) = 48. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -2$, откуда $y = x + 2$. Подставляем это в первое уравнение: $(x^2 + 2x + 3)(2x + 2) = -24$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение $-x = -3$. Выделив множитель $(x + 3)$, получаем $(x + 3)(x^2 + 5) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -3$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-3; -1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке K . Окружность, построенная на отрезке CK как на диаметре, проходит через вершину B и касается прямой DE . Известно, что $DK = 3$. Найдите высоту AH треугольника ABC , радиус окружности и площадь треугольника ABC .

Ответ: $AH = 18$, $R = 6$, $S_{ABC} = 54\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , точку касания прямой DE с окружностью через T , а радиус окружности через R . Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины,

$EK = \frac{1}{2}CK = R$, $BD = 3DK = 9$, $BK = 2DK = 6$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике OET катет $OT = R$, а гипотенуза $OE = 2R$. Следовательно, $\angle TEO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника ABC , поэтому $DE \parallel BC$, $\angle KCB = \angle KED = 30^\circ$. Из треугольника BKC находим, что $BC = BK \operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}$, $2R = CK = \frac{BK}{\sin 30^\circ} = 12$.

Высота AH исходного треугольника вдвое больше, чем BD (т.к. BD – средняя линия треугольника ACH). Значит, $AH = 18$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}BC \cdot AH = 54\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 432.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$ способа.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60, \\ \left(x + 6 \sin \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+3}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 30, б) $a = -29, a = 23$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x \geq 0, \\ 12y \geq 0, \\ 60 - 5x - 12y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 5x + 12y \leq 60. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(12; 0)$, $G(0; 5)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 30.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -3$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN . Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$-6 \sin \frac{a\pi}{2} = 6, \quad \left(\frac{a+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -29$ и $a = 23$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки T и F такие, что $FT \parallel BC$, а плоскости ABT и FA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка CT .

Ответ: $V = 405\sqrt{3}$, $CT = 9$ или $CT = 3$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r . Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3} = 3\sqrt{15}$, площадь основания $S = \frac{\sqrt{3}}{4} (3\sqrt{15})^2 = \frac{135\sqrt{3}}{4}$, объём призмы равен $Sh = \frac{135\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 405\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость FAC также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями FAC и FA_1C_1 лежат на отрезках FQ и FQ_1 , где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1 .

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q . Обозначим центр окружности ω , получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O , а точки касания отрезков FQ_1 , QQ_1 и FQ с окружностью – G , J и P соответственно. Высота FH треугольника FQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $FH = 3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника FQQ_1 двумя способами: $S_0 = pr$ и $S_0 = \frac{1}{2} FH \cdot QQ_1 = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 12 = 18r$, где p – полупериметр треугольника FQQ_1 . Следовательно, $p = 18$. Обозначим $QJ = x$; тогда $Q_1G = Q_1J = 12 - x$, $PQ = x$, $FG = FP = \frac{1}{2} (36 - 2x - 2(12 - x)) = 6$.

Значит, $QQ_1 = 12$, $QF = 6 + x$, $Q_1F = 18 - x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0 = \sqrt{18 \cdot 6 \cdot x \cdot (12 - x)}$, откуда $\sqrt{18 \cdot 6 \cdot x \cdot (12 - x)} = 18r$, $x(12 - x) = 3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2 - 12x + \frac{135}{4} = 0$, следовательно, $x = \frac{9}{2}$ или $x = \frac{15}{2}$.

Тогда $QF = \frac{21}{2}$ или $QF = \frac{27}{2}$, а так как $BF = \sqrt{QF^2 - BQ^2} = \sqrt{QF^2 - 9r^2}$, то $BF = 3$ или $BF = 9$. Остаётся заметить, что $CT = BF = QH$.

1. Решите неравенство $(x^2 + x + 1)^{4x^3 + x^2} \geq (x^2 + x + 1)^{x - 2x^3}$.

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Решение. Основание степени положительно при всех x , поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$(x^2 + x)(4x^3 + x^2) - (x - 2x^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)x^2(6x^2 + x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)x^2(2x+1)(3x-1) \geq 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin 8x + \sin 4x}{\cos 5x + \cos x} = 6|\sin 2x|$.

Ответ: $x = -\arccos \frac{\sqrt{13} - 3}{4} + 2k\pi$, $x = -\arccos \frac{3 - \sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2 \cos 2x \sin 6x}{2 \cos 3x \cos 2x} = 6 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos 3x} = 6 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \sin 3x = 6 \cdot |\sin x \cos x| \Leftrightarrow \sin x(3 - 4 \sin^2 x) = 6 \cdot |\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \geq 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\sin x(4 \cos^2 x - 1) = 6 \sin x \cos x$, откуда либо $\sin x = 0$ и $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, либо $4 \cos^2 x - 1 = 6 \cos x$, $4 \cos^2 x - 6 \cos x - 1 = 0$. Следовательно,

$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \frac{3 + \sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения

$\cos x = \frac{3 - \sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos \frac{3 - \sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем

$\sin x(4 \cos^2 x - 1) = -6 \sin x \cos x$, откуда $4 \cos^2 x + 6 \cos x - 1 = 0$. Следовательно, $\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение

$\cos x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения

$\cos x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos \frac{\sqrt{13} - 3}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$

Ответ: (4;1).

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 5(x-y) + 3 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 5(x^2 - y^2) + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-5)(x-y) = -3, \\ (xy-5)(x-y)(x+y) = -15. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 5$, откуда $y = -x + 5$. Под-

ставляем это в первое уравнение: $(-x^2 + 5x - 5)(2x - 5) = -3$, $2x^3 - 15x^2 + 35x - 28 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x = 4$. Выделив множитель $(x - 4)$, получаем $(x - 4)(2x^2 - 7x + 7) = 0$.

Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Тогда $y = 1$, и пара чисел (4;1) является единственным

решением системы.

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке T . Окружность, построенная на отрезке MT как на диаметре, проходит через вершину L и касается прямой DE . Известно, что $DT = 2$. Найдите высоту KH треугольника KLM , угол ETD и площадь треугольника KLM .

Ответ: $KH = 12$, $\angle ETD = 60^\circ$, $S_{KLM} = 24\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , точку касания прямой DE с окружностью через S , а радиус окружности через R . Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины,

$ET = \frac{1}{2}MT = R$, $LD = 3DT = 6$, $LT = 2DT = 4$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике OES катет $OS = R$,

а гипотенуза $OE = 2R$. Следовательно, $\angle SEO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника KLM , поэтому $DE \parallel LM$, $\angle TML = \angle TED = 30^\circ$. Из треугольника TLM находим, что $LM = TL \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$. $\angle ETD = \angle LTM = 60^\circ$.

Высота KH исходного треугольника вдвое больше, чем LD (т.к. LD – средняя линия треугольника KMH). Значит, $KH = 12$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}KH \cdot LM = 24\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 4 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

6. Дана система уравнений
$$\begin{cases} |4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24, \\ (x - 3)^2 + \left(y - 4 \sin \frac{a\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 24; б) $a = -11, a = 9$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x \geq 0, \\ 3y \geq 0, \\ 24 - 4x - 3y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 4x + 3y \leq 24. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(6; 0), G(0; 8), N(0; 0)$, площадь которого равна 24.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -1$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN . Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$4 \sin \frac{a\pi}{2} = 4, \quad \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = (5)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -11$ и $a = 9$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 5. Сфера Ω радиуса $r = \frac{\sqrt{33}}{4}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки F и L такие, что $FL \parallel BC$, а плоскости LAC и FA_1B_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка CF .

Ответ: $V = \frac{495\sqrt{3}}{16}$, $CF = 2$ или $CF = 3$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно

вписать окружности того же самого радиуса r . Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$, площадь основания $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3\sqrt{11}}{2} \right)^2 = \frac{99\sqrt{3}}{16}$, объём призмы равен $Sh = \frac{99\sqrt{3}}{16} \cdot 5 = \frac{495\sqrt{3}}{16}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость LA_1C_1 также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями LAC и LA_1C_1 лежат на отрезках LQ и LQ_1 , где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1 .

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q . Обозначим центр окружности ω , получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O , а точки касания отрезков LQ_1 , QQ_1 и LQ с окружностью – G , J и P соответственно. Высота LH треугольника LQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $LH = 3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника LQQ_1 двумя способами: $S_0 = pr$ и $S_0 = \frac{1}{2}LH \cdot QQ_1 = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 5 = \frac{15r}{2}$, где p – полупериметр треугольника LQQ_1 . Следовательно, $p = \frac{15}{2}$. Обозначим $QJ = x$; тогда $Q_1G = Q_1J = 5 - x$, $PQ = x$, $LG = LP = \frac{1}{2}(15 - 2x - 2(5 - x)) = \frac{5}{2}$.

Значит, $QQ_1 = 5$, $QL = \frac{5}{2} + x$, $Q_1L = \frac{15}{2} - x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0 = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot x \cdot (5 - x)}$, откуда $\sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot x \cdot (5 - x)} = \frac{15r}{2}$, $x(5 - x) = 3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2 - 5x + \frac{99}{16} = 0$, следовательно, $x = \frac{11}{4}$ или $x = \frac{9}{4}$.

Тогда $QL = \frac{21}{4}$ или $QL = \frac{19}{4}$, а так как $BL = \sqrt{QL^2 - BQ^2} = \sqrt{QL^2 - 9r^2}$, то $BL = 3$ или $BL = 2$. Остаётся заметить, что $CF = BL = QH$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(6) Не указано, что основание степени положительно *баллы не снимать*,
 – неэквивалентное преобразование неравенства *0 баллов за все последующие действия*,
 – за рассмотрение каждого из случаев (основание степени > 1 , основание степени < 1 , основание степени равно 1) *2 балла*,
при ином способе решения:
 – неравенство сведено к алгебраическому *2 балла*,
 – получено разложение на множители *1 балл*,
 – при решении методом интервалов потеряна изолированная точка *снять 2 балла*.
- 2.(6) Уравнение приведено к виду $\frac{\cos 3x \sin x}{\cos x} = a|\sin 2x|$ (билет 33), $\frac{\sin 3x \cos x}{\sin x} = a|\sin 2x|$ (билет 34),
 $\cos 3x = a|\sin 2x|$ (билет 35), $\sin 3x = a|\sin 2x|$ (билет 36) *1 балл*,
 – в каждом из двух случаев раскрытия модуля получено уравнение относительно $\sin x$ ($\cos x$)
 *2 балла (по 1 баллу за случай)*,
 – решено одно из этих уравнений (или оба) *1 балл*,
 – сделан отбор, возникающий за счёт знака модуля *2 балла (по 1 баллу за случай)*,
 – в вариантах 33–35 не отброшена серия $x = k\pi$, в варианте 36 потеряна серия $x = k\pi$ *снять 1 балл*,
 – неэквивалентное преобразование с модулем (например, $|\sin 2x| = 2 \sin x |\cos x|$)
 *не более 2 баллов за задачу*.
- 3.(6) Получено линейное соотношение между переменными (в билете 33 – $y = x + 3$, в билете 34 –
 $x + y = 3$, в билете 35 – $y = x + 2$, в билете 36 – $x + y = 5$) *3 балла*,
 – решено кубическое уравнение *2 балла*,
 – получено решение системы *1 балл*.
- 4.(8) Дан ответ на один из вопросов задачи *2 балла*,
 – дан ответ на два вопроса задачи *5 баллов*.
- 5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа *1 балл*,
 – за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) *баллы не добавляются*,
 – при решении перебором получен неверный ответ *не более 1 балла за задачу*,
 – ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. *баллы не снимаются*.
- 6.(8) а) (4) Построено множество *3 балла*,
 – найдена его площадь *1 балл*.
- б) (4) указано, что ровно три решения возможны тогда и только тогда, когда второе уравнение задаёт окружность, описанную около треугольника, задаваемого первым уравнением *2 балла*,
 – за каждое найденное значение параметра *по 1 баллу*.
- 7.(8) – Найден объём призмы *1 балл*,
 – найден отрезок *7 баллов*.

КРИТЕРИИ

определения победителей и призёров олимпиады школьников «Физтех» по математике

9 класс

Максимальное количество очков – 32.

- Победитель – от 30 до 32 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 26 до 29 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 20 до 25 очков включительно.

10 класс

Максимальное количество очков – 35.

- Победитель – от 30 до 35 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 24 до 29 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 18 до 23 очков включительно.

11 класс

Максимальное количество очков – 48.

- Победитель – от 40 до 48 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 31 до 39 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 24 до 30 очков включительно.

Председатель жюри олимпиады



С.Е. Городецкий